GEORG CHRISTOPH MEHRTENS

STATIK

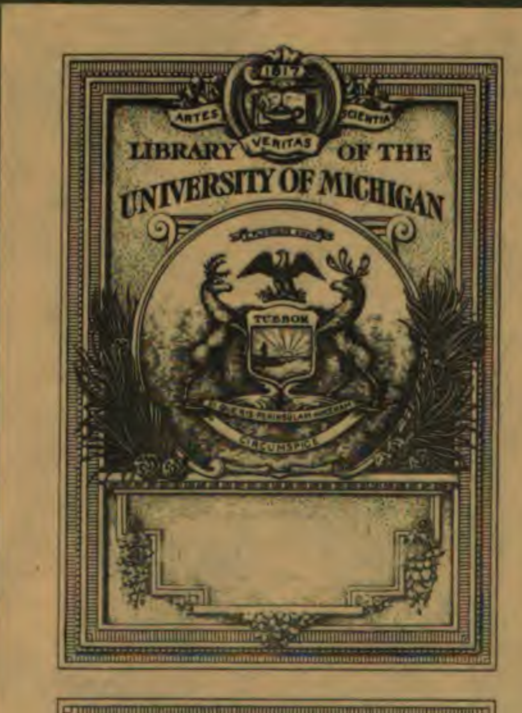
DER

BAUKONSTRUKTIONEN

UND

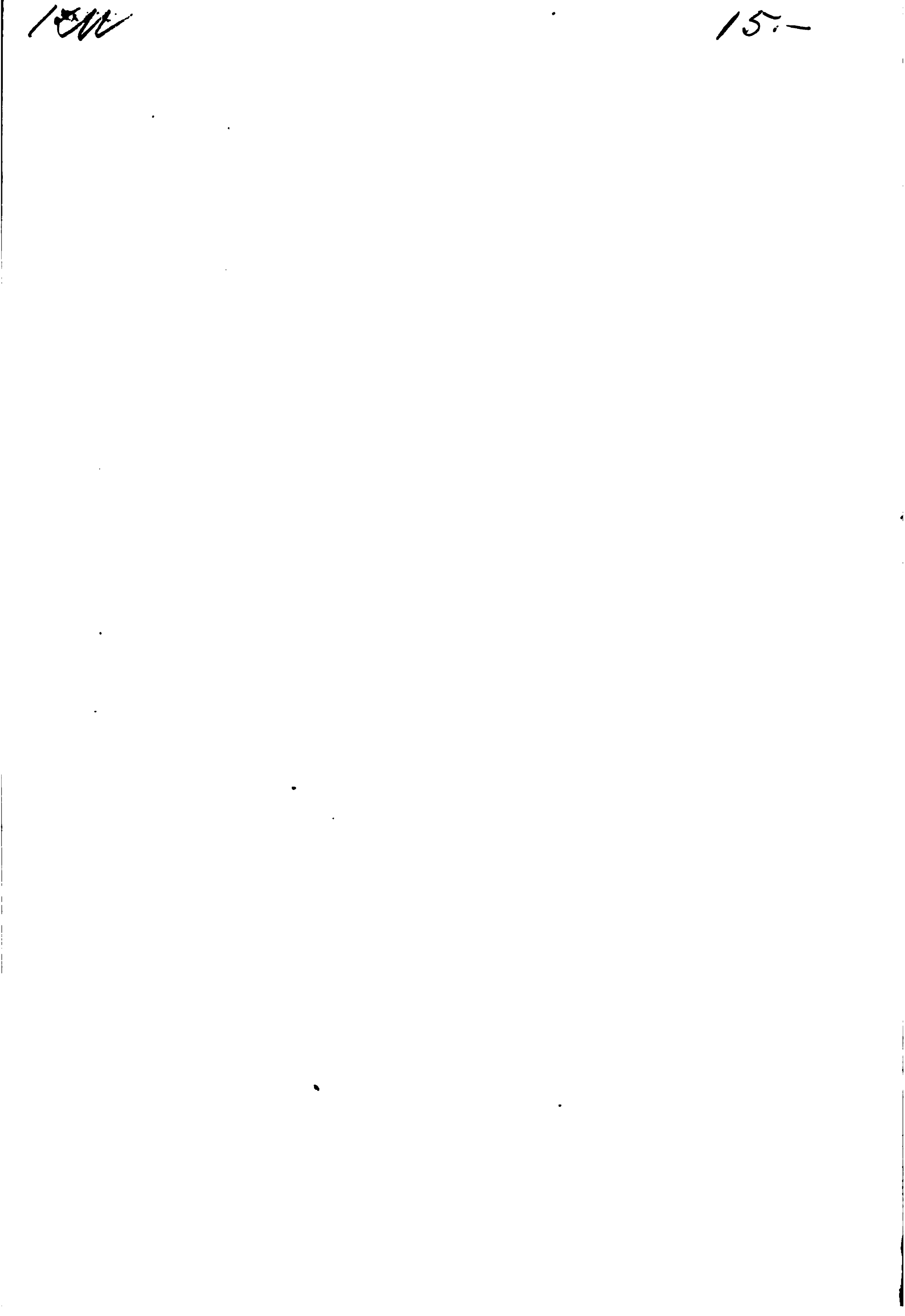
FESTIGKEITSLEHRE

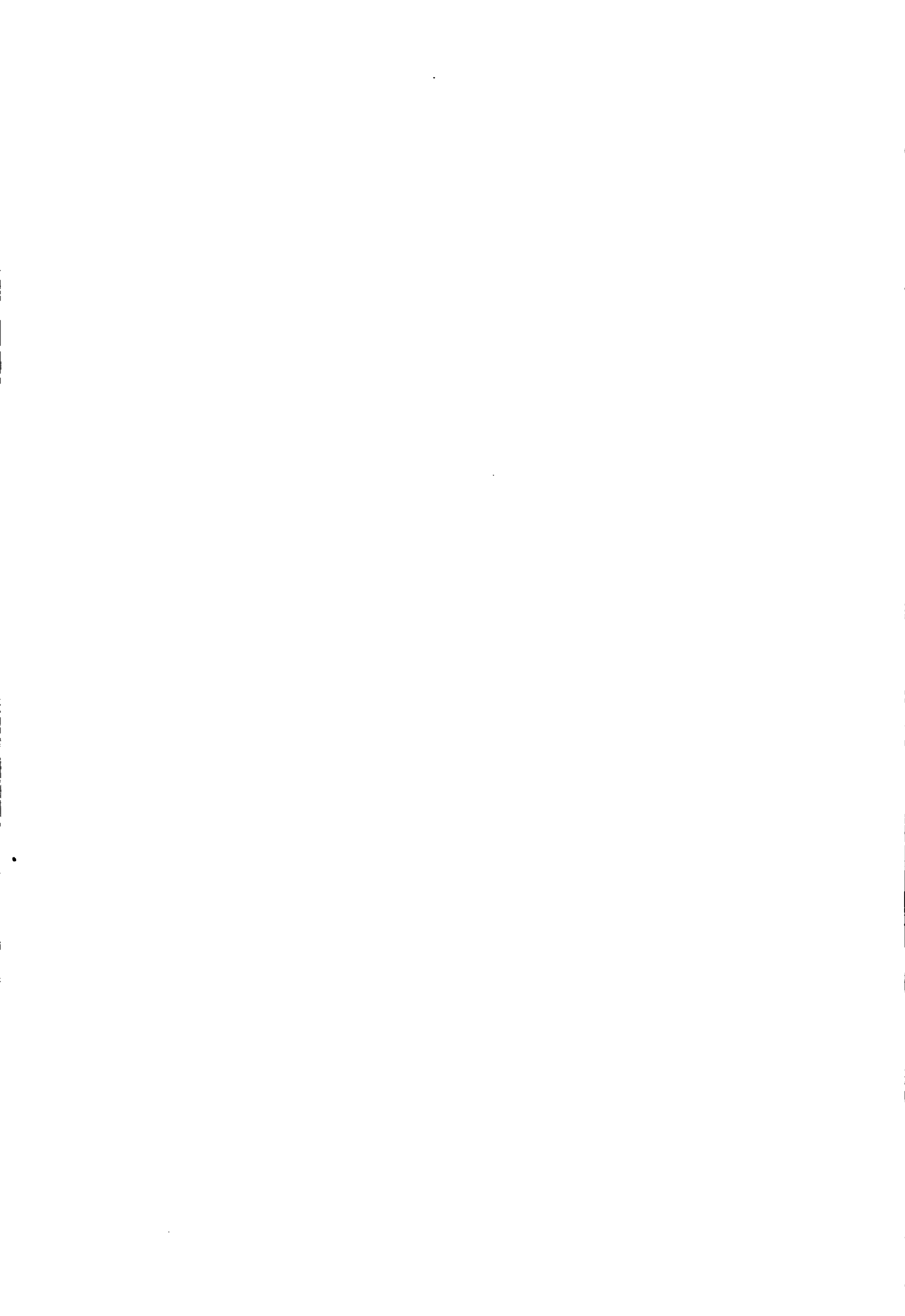
ZWEITER BAND


1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE









VORLESUNGEN

ÜBER

STATIK DER BAUKONSTRUKTIONEN UND FESTIGKEITSLEHRE

IN DREI BÄNDEN

VON

GEORG CHRISTOPH MEHRTENS

GEH. HOFRAT UND PROFESSOR DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN AN DER KÖNIGLICHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN DRESDEN

ZWEITER BAND

STATISCH BESTIMMTE TRÄGER

MIT 231 ZUM TEIL FARBIGEN FIGUREN

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1904

VORWORT
zum zweiten Bande.

Beim Erscheinen des zweiten Bandes erneuere ich das im Vorwort des ersten Bandes gegebene Versprechen, wonach meine Vorlesungen im Jahre 1905 in drei Bänden fertig vorliegen sollen. Auch darf ich mich auf das dort über Form und Inhalt des Werkes Gesagte hier beziehen, denn ich kann die anfangs geplante Art der Verteilung und Bearbeitung des Unterrichtsstoffes im wesentlichen beibehalten. Danach umfaßt der vorliegende Band, der den Titel »Statisch bestimmte Träger« erhalten hat, in zwei Abschnitten die Berechnung der ebenen Fachwerke und Vollwandträger, eingeschlossen Gewölbe und Stützmauern, wobei Betrachtungen über die Grundlagen der Elastizitäts-Theorie, sowie auch eine ausführliche Darstellung der geschichtlichen Entwicklung der Theorie der Gewölbe und Stützmauern eingeflochten sind. Der dritte Band wird unter dem Titel »Formänderungen und statisch unbestimmte Träger« diese Vorlesungen abschließen, daneben aber auch noch einige besondere Abschnitte bringen, die zu meinen Vorlesungen über »Eisenbrücken« einleiten, wie »Nebenspannungen und Dynamische Einflüsse«.

Während die Aufgaben des ersten Bandes in der Regel nur ständige Trägerlasten voraussetzen*) also Lasten, die ununterbrochen wirken, ohne ihre Angriffspunkte zu verändern, liegt den Berechnungen des vorliegenden Bandes durchweg die Annahme veränderlicher Belastung zugrunde. Deshalb werden im § 1 »Einfache Balkenträger unter dem Einflusse veränderlicher Lasten« betrachtet. In der dabei entwickelten Theorie der Einflußlinien brauchten die Trägersysteme noch nicht berücksichtigt zu werden, weil bei statisch bestimmten Balkenträgern die äußern und innern Kräfte allein von der Trägerstützweite

---

* Ausnahmen vergl. I. 10. 87. 110. 111.

und der Art der Lastübertragung in der Trägerfahrbahn, nicht aber vom Trägersystem abhängig sind. An den einleitenden § 1 schließen sich

§ 2. Grenzwerte der äußern Kräfte einfacher Balkenträger;

§ 3. Die Stabkräfte der einfachen Balkenfachwerke;

§ 4. Äußere und innere Kräfte zusammengesetzter Fachwerke;

§ 5. Beispiele von zusammengesetzten Fachwerken.

Die in § 4 und § 5 gegebene kinematische Darstellung von Einflußflächen ist besonders Anfängern zum Studium zu empfehlen, damit sie durch den Vergleich mit dem in § 1 bis § 3 angewendeten statischen Verfahren sich selbst ein Urteil darüber bilden können, ob in Einzelfällen das statische oder das kinematische Verfahren den Vorzug verdient.

Der erste Abschnitt bietet, entweder der Form oder dem Inhalte nach einiges Neue, z. B.: Allgemeine Herleitung der Einflußlinien der äußern Kräfte aus der grundlegenden Einflußlinie der Stützenkraft (S. 8); Erklärung und Darstellung der Stützenkraftlinie als Summen-Einflußlinie der Stützenkraft (S. 25) und deren Verwendung in besonderen Fällen (S. 30); Einführung der Bezeichnung »Bogenkraft« für den Horizontalschub oder Horizontalzug der Bogenträger (S. 2 und 118); Verwendung von Richtungslinien und Mittelkraftlinien für das Auftragen der Einflußlinien zusammengesetzter Fachwerke (S. 117, 131—32, 140—42, 148—50).

Der zweite Abschnitt ist »Vollwandbogenträger, Gewölbe und Stüzmauern« betitelt und bringt im einleitenden § 6 eine Betrachtung über die Bogenträger im allgemeinen. Dabei wird der 4. Abschnitt des I. Bandes »Spannungen in geraden Stäben« durch eine ausführliche Berechnung der Spannungen in krummen Stäben ergänzt (S. 148—164) und festgestellt, daß Vollwandbogenträger in der Regel genau genug nach den im I. Bande (§ 15 und § 16) für den geraden Stab abgeleiteten Formeln berechnet werden können. Weiterhin ist dann noch ein Beispiel eingefügt, worin die Randspannungen eines Bogens unter genauer Berücksichtigung seiner krummen Gestalt ermittelt worden sind (S. 195—196). Es folgen:

§ 7. Der Dreigelenkbogen und § 8 Berechnung des beiderseits eingespannten Tonnengewölbes als Dreigelenkträger, woran sich geschichtliche Rückblicke auf die Entwickelung der

Gewölbetheorie schließen. § 8 bringt — außer der erwähnten Betrachtung der Grundlagen der Elastizitätstheorie — eine neue Näherungsberechnung des Tonnengewölbes, in welcher (unter Verwendung von Einflußlinien) der überhaupt gefährlichste Querschnitt bestimmt und diejenige Mittelkraftlinie benutzt wird, die das überhaupt größte Moment liefert (S. 184—191, 204—214, 255).

§ 9. Einführung in die Theorie des Erddruckes enthält eine Übersicht der Geschichte der Erddrucktheorie, unter Berücksichtigung der heute noch offenen Fragen, wie Richtung des Erddruckes, Gestalt der Gleitfläche, Anwendbarkeit der Theorie des Erddruckes im unbegrenzten Erdreiche usw. Eine Fortsetzung des § 9 bildet § 10 Graphische Berechnung der Stützmauern insofern, als darin die Grundlagen der Theorie des Erddrucks auf die Berechnung der wichtigsten Konstruktionsfälle angewendet und durch Zahlenbeispiele erläutert werden. Der zweite Band schließt in § 11 mit einem »Anhang«, der einige für die Berechnungen von Fachwerken, Gewölben und Stützmauern nützliche Zahlenangaben enthält: Über Eigengewichte, Verkehrslasten, Fugendrücke usw., sowie auch über Festigkeitseigenschaften der Baustoffe. Diese Angaben sollen später auch für die im dritten Bande folgenden Berechnungen statisch unbestimmter Bauwerke verwertet werden.

Aus den Besprechungen des ersten Bandes meiner Vorlesungen habe ich mit Genugtuung ersehen, wie meine Auffassung über die geeignetste Form und Darlegung von Aufgaben der Statik der Baukonstruktionen, sowohl im Inlande, als namentlich auch im Auslande allseitige Zustimmung erfahren hat. Deshalb werde ich fortfahren, »neben der theoretischen Seite der Aufgaben auch deren konstruktive Seite, mehr als dies bisher geschehen ist, zu betonen«. Dazu bot der vorliegende Band noch mehr Gelegenheit als der erste, der die »Grundlagen« behandelte.

So übergebe ich denn auch den zweiten Band meiner Vorlesungen hiermit der Öffentlichkeit, in der Hoffnung, daß auch ihm das Wohlwollen meiner Fachgenossen nicht fehlen möge. Gleichzeitig danke ich allen denjenigen, die mich durch Hinweis auf Unrichtigkeiten des Textes in den Stand gesetzt haben, das Druckfehlerverzeichnis des ersten Bandes zu ergänzen.

Meinem Assistenten, Herrn Regierungsbaumeister Hasse, der das Nachprüfen der Rechnungen besorgt und mir auch bei allen Korrekturen

unermüdlich beigestanden hat, sage ich an dieser Stelle nochmals meinen besten Dank für seine wertvolle Unterstützung.

Schließlich gedenke ich gerne noch dem so umsichtigen Walten der Verlagsbuchhandlung von Wilhelm Engelmann in Leipzig bei der Drucklegung und Ausstattung des ganzen Werkes, indem ich ihrem Haupte und dessen Mitarbeitern für ihre ausgezeichnete Mithilfe und für das stete liebenswürdige Entgegenkommen auf meine Wünsche den verbindlichsten Dank sage.

Dresden-A., den 10. Juli 1904.

Mehrtens.

INHALT.

Erster Abschnitt. Äußere und innere Kräfte statisch bestimmter Träger.

§ 5. **Beispiele von zusammengesetzten Fachwerken.**

No. Seite

Zweiter Abschnitt. Vollwandbogenträger, Gewölbe und Stützmauern.

§ 6. Einleitung (Bogenträger im allgemeinen).

§ 7. Der Dreigelenkbogen.

§ 8. Berechnung des beiderseits eingespannten Tonnengewölbes als Dreigelenkträger.

§ 9. Einführung in die Theorie des Erddruckes.

Ergänzungen der Berichtigungen des I. Bandes.

Seite	Zeile von oben	Zeile von unten	Steht falsch	Heißt richtig
128	—	6	In Fig. 139: $1\,(1'),\ m\,(m')$ / $o\ ,\ o$	$1\ ,\ m$ / $1'\ ,\ m'$
141	—	17	Kräfte	Kräfte, bezogen auf das Gelenk
160	—	17	$-(1 + \mathrm{II})$	$-(\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III})$
160	—	16	II und III	III und IV
191	—	10	zwei wagerechte	zwei gleichgroße wagerechte
192	—	6	Richtungen	Richtungen der Mittelkraft
192	—	5—4	von »in zwei« bis »die«	Diese Worte fallen ganz fort
192	1	—	P	V
200	3	—	(47)	(49)
200	5	—	(49)	(47)
238	—	3	In Fig. 254 Punktierte Parallelen $2'c'a$ und $5'c'b$	Müssen parallel sein den Stäben 2—c und 5—c
303	11	—	$\int_0^r \varrho_2$ usw.	$\int_0^r \varrho^2$ usw.
318	—	7	Spannung.	Schubspannung
320	5	—	$\overline{bd} - \overline{bd'}$	$-(\overline{bd'} - \overline{bd})$
373	15	—	τ	T
378	—	8	$\mp$	$\pm$
381	—	10	$\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$	$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$

Berichtigungen zum II. Bande.

Seite	Zeile von oben	Zeile von unten	Steht falsch	Heißt richtig
37	5	—	19,45	19,52
91	13	—	o_5	u_5
156	—	6	In Fig. 130: I—III	II—III
156	—	3	I—III	II—IV
157	1	—	X und VII	X_e und VII_e
157	2	—	VI	VI_e
157	2	—	VII_e	V—VI
190	—	6	$x = v + l$	x
191	6	—	$0{,}23\,l$	$0{,}20\,l$
211	2	—	$\varrho_0\, dx^2$	$\frac{dx^2}{\varrho_0}$
255	—	7	messen	bemessen

Erster Abschnitt.

Äußere und innere Kräfte statisch bestimmter Träger.

1. Einleitung. Ein *ebener* Träger ist ein solcher, dessen sämtliche Stabachsen in einer einzigen Ebene liegen, in welcher auch alle äußeren Kräfte wirken. Diese Ebene heißt die *Kraftebene* (I. **11**).

a. Balkenträger und Bogenträger. Bei den vollwandigen und den gegliederten ebenen Trägern unterscheidet man zwei Hauptarten: *Balkenträger* und *Bogenträger*. Als Unterscheidungsmerkmal gilt die *Richtung der Stützenkräfte* unter dem Einflusse von *lotrecht* wirkenden Lasten: *Unter solchen Lasten erleiden Balkenträger immer nur lotrecht gerichtete und Bogenträger stets schräggerichtete Stützenkräfte.*

Es ist wohl zu beachten, daß nach obiger Erklärung nicht die *Gestalt* einer Trägerscheibe (als Balken oder Bogen), sondern *die Art ihrer Stützung* das entscheidende Merkmal bildet. Die beweglichen Stützen eines Balkenträgers müssen daher entweder lotrecht gestellte Pendelstützen oder Rollen mit wagrechter Rollebene sein (I. **20**), wenn ihre Stützpunkte immer nur lotrecht gerichtete Stützenkräfte erfahren sollen.

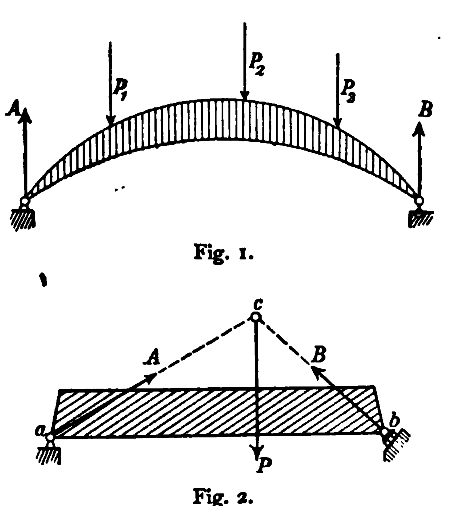


Fig. 1.

Fig. 2.

Der in Fig. 1 dargestellte Träger ist, trotz der Bogengestalt seiner Scheibe, ein *Balken*träger und der in Fig. 2 gezeichnete Träger ist ein *Bogen*träger, obwohl seine Scheibe den Umriß eines Balkens zeigt.

Jede Stützenkraft eines Bogenträgers läßt sich danach in eine lotrechte und eine wagrechte Seitenkraft zerlegen. *Diese soll weiterhin die Bogenkraft genannt werden.* Sie ist entweder nach *außen* oder nach *innen* gerichtet, je nachdem die Mittelkraftlinie (I. **58**) aller äußern Kräfte des Trägers ein *aufrechtstehendes* oder *hängendes* Seileck darstellt (I. **55**).

b. Einfache und zusammengesetzte Träger. Bei den im vorliegenden Abschnitt zu behandelnden Trägerarten werden *hinsichtlich der Anordnung ihres Tragwerks,*

einfache und *zusammengesetzte* Träger

unterschieden, ganz gleich ob es sich dabei um ein vollwandiges oder gegliedertes Tragwerk handelt.

Einfache Träger besitzen keine Zwischengelenke. Sie bestehen aus einer einzigen Scheibe (I. **11**, S. 19) und wenn sie *außen* statisch bestimmt sind (I. **35**, S. 69), müssen sie durch drei Stäbe an die Erdscheibe geschlossen werden (I. **22**). Sie sind also Träger *auf zwei Stützen.* Steht ein Trägerende über seiner Stütze vor, so nennt man das überstehende Ende einen *Ausleger* und spricht in solchem Falle von einem *Auslegeträger* (I. **61**, Fig. 155), der *einarmig* oder *zweiarmig* sein kann, je nachdem er nur an einem Ende oder an beiden Enden übersteht. Die Auslegeträger kommen in der Regel nur bei den zusammengesetzten Trägern vor, weshalb sie auch im Zusammenhange mit diesen besprochen werden sollen.

Der wesentliche *Unterschied zwischen den einfachen und zusammengesetzten Trägern* besteht darin, daß diese (außer ihren Stützengelenken) immer noch eine Anzahl von *Zwischengelenken* besitzen, die im ersten Bande als *Scheiben*gelenke bezeichnet worden sind. Wie schon die frühern allgemeinen Beispiele (I. **31**) dartun, lassen sich derartige zusammengesetzte Träger, namentlich wenn es gegliederte sind, in mannigfachster Weise bilden, worüber die Fig. 75 bis 80 (unter I. **31**) zu vergleichen sind. Für die Zwecke des vorliegenden Bandes genügt es, darunter nur solche Systeme näher zu betrachten, die es im Bauwesen bisher zu einer Geltung gebracht haben.

c. Trägerlasten und deren Übertragung auf die Trägerknoten. Im I. Bande wurden alle Berechnungen unter der Annahme von *ständigen* Lasten ausgeführt. Das sind Lasten, die *ununterbrochen* wirken, ohne dabei ihre Angriffspunkte zu verändern. Nur ausnahmsweise ist einige Male angedeutet worden, wie der Einfluß veränderlicher Lasten (I. **10**) berücksichtigt werden kann. Das ist geschehen beim Hervorheben der Vorzüge des Verfahrens von Mohr zur Berechnung von Raumfachwerken (I. **87**) und später (unter I. **110** und **111**), wo die

Einflußlinien einer Spannung und einer Randspannung im Querschnitt des geraden Stabes besprochen worden sind.

Im vorliegenden Bande werden, im Gegensatze zum I. Bande, in der Regel nur veränderliche Lasten betrachtet, und zwar in erster Linie

bewegliche oder *Verkehrslasten*, die aus einem Verkehre von Menschen, Tieren oder Fahrzeugen entstehen

und in zweiter Linie

zufällige Lasten, die — wie Stürme, Winde, Schneefälle u. dergl. — natürlichen Ursachen entspringen.

In welcher Weise die veränderlichen Lasten mit Hilfe von *Querkonstruktionen* auf die dazu vorgesehenen und ausgebildeten *Knotenpunkte* der Konstruktion übertragen werden, ist im I. Bande auseinandergesetzt worden (I. **10**, S. 18 und Fig. 9—12). In der Regel verkehren die veränderlichen Lasten auf *ebenen* Bahnen — den *Fahrbahnen* — die in geeigneter Art gestützt oder angehängt werden.

Meistens ist die Übertragung der Verkehrslasten eine *mittelbare*. Bei Vollwandträgern können die Lasten allerdings ohne Nachteil auf einem Gurte unmittelbar rollen, selbst wenn dieser nicht ganz gerade, sondern ein wenig gekrümmt ist. Bei Fachwerkträgern brächte eine derartige Übertragung aber große Nachteile mit sich, weil diese nicht, wie Vollwandträger, in jedem Querschnitte der Tragwand *biegungsfest* genug sind. Jeder Stab eines Fachwerks wird in erster Linie für seine *Achsenkraft* berechnet (I. **16**, c). Bei unmittelbarer Übertragung der Verkehrslasten werden aber alle Stäbe des sog. *Lastgurtes* — an welchem die Fahrbahn liegt — außer ihrer Achsenkraft auch noch die von den rollenden Lasten erzeugten *Biege*momente aufzunehmen haben, was einerseits eine nachteilige *Formänderung* des Trägers herbeiführen und anderseits auch unwirtschaftlich große Stabquerschnitte notwendig machen würde. *Bei Fachwerken sollte die Lastübertragung danach immer eine mittelbare sein.*

Über die *rechnungsmäßige Übertragung der Trägerlasten auf die Trägerknoten* eines Fachwerkes vergl. unter **16**, c.

§ 1. Einfache Balkenträger unter dem Einflusse veränderlicher Lasten.

Die inneren Kräfte (und in ihrem Gefolge die Formänderungen) aller Träger hängen bei statisch bestimmten Systemen allein von den *äußeren Kräften* ab, und diese sind bei *Balken*trägern wiederum allein abhängig von der Träger*stützweite* und der Art der Lastübertragung in der Träger*fahrbahn*, nicht aber vom Träger*system*. Bei der Betrachtung

des Einflusses veränderlicher Lasten braucht deshalb das Träger*system* zunächst nicht berücksichtigt zu werden. Die nachfolgenden Darlegungen gelten also für Vollwandträger und Fachwerke, wenn diese einfache Balkenträger sind.

Die Richtung der Lasten soll *lotrecht* angenommen werden, die Fahrbahn *wagrecht*. Die *Querträger*punkte liegen bei Fachwerken in Knoten-Lotrechten. Die Entfernung zweier Querträger wird die *Feldweite* genannt.

2. Die wandernde Einzellast und der Lastenzug. Auf einem Träger ab (Fig. 3) bewege sich von einem Stützpunkte bis zum andern eine Einzellast P. Diese sei auf ihrer Wanderung augenblicklich in irgend einem Punkte m angekommen. In einem beliebigen Trägerquerschnitte bei n werde eine der unbekannten Querschnittsgrößen berechnet, z. B. die Querkraft, das Moment, die Randspannung oder (bei gegliederten Trägern) eine der durchschnittenen Stabkräfte oder dergl., die unter der Wirkung der im Punkte m augenblicklich ruhenden Einzellast P erzeugt werden. Dann gelten zunächst folgende Bezeichnungen und Erklärungen:

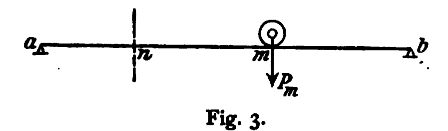


Fig. 3.

1. Der augenblickliche Angriffspunkt der wandernden Einzellast heißt der *Lastpunkt* oder *Fußpunkt*.
2. Eine von der im Lastpunkte m ruhenden Einzellast erzeugte Querschnittsgröße in n heißt eine *Einflußgröße*.
3. Stellt man die Einflußgröße eines bestimmten Schnittes bei n als eine Strecke η dar und trägt diese als Ordinate im Lastpunkte m auf, so liegen bei der Wanderung der Einzellast die Endpunkte aller Strecken η in einer Linie, die man *Einflußlinie* nennt (Fig. 4).

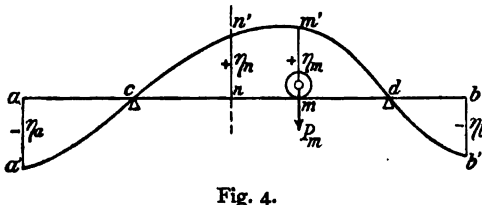


Fig. 4.

4. Die von der Trägerlinie, den Endordinaten und der Einflußlinie begrenzte Fläche heißt *Einflußfläche*. Sie setzt sich im allgemeinen aus *positiven* und *negativen Teilflächen* zusammen.

Zweckmäßig zeichnet man eine Einflußlinie immer für *eine wandernde Last* $P = 1$, weil man dann den Einfluß jeder Last P_m von beliebiger Größe aus dem Produkte $P_m \eta_m$ erhält, wenn η_m die im Lastpunkte m aufgetragene Einflussgröße für $P = 1$ ist. Fällt der Lastpunkt m mit

dem Fußpunkte der *größten* Ordinate η_m der Einflußfläche zusammen, so nennt man die dazu gehörige Stellung der wandernden Einzellast *die gefährlichste Lastlage.*

Die für $P = 1$ gezeichneten Einflußlinien sind heute in der Statik ebenso wichtige Hilfsmittel wie Kraftecke und Seilecke. Sie dienen hauptsächlich dazu, um für einen *Lastenzug* die sog. *gefährlichste Lastlage* und auf diesem Wege auch die *Grenzwerte* unbekannter Querschnittsgrößen aufzufinden. Es soll erläutert werden, wie das im allgemeinen geschehen kann.

Wie im I. Bande (I. **7**) schon gesagt wurde, darf aus Gründen der Sicherheit in keinem Stabquerschnitte einer Konstruktion und *bei keiner möglichen Lage ihrer Belastung* die maßgebende Spannung (I. **120**) eine als zulässig anerkannte Grenze überschreiten. Es kommt also darauf an, für jeden Stab (oder jeden Trägerquerschnitt) diejenige Lage des Lastenzuges aufzufinden, für welche die maßgebenden äußern oder innern Kräfte im betreffenden Querschnitt bei n ihren *positiven oder negativen Grenzwert* erreichen. Diese Lage des Lastenzuges heißt *die gefährlichste.* Um sie aufzufinden zeichnet man zuerst eine Einflußlinie der betrachteten Einflußgröße (äußere oder innere Kraft oder Formänderung) und zwar für *eine wandernde Einzellast* $P = 1$. Für irgend eine Stellung eines gegebenen Lastenzuges (Fig. 5) kann man dann dessen Gesamteinfluß — die sog. *Summen-Einflußgröße* — in einfacher Weise berechnen. Man braucht zu diesem Zwecke nur für jeden Lastpunkt und die dazu gehörige Last P die erhaltenen Produkte $P\eta$ zu addieren. Bezeichnet Z die gesuchte Summen-Einflußgröße, so ist danach

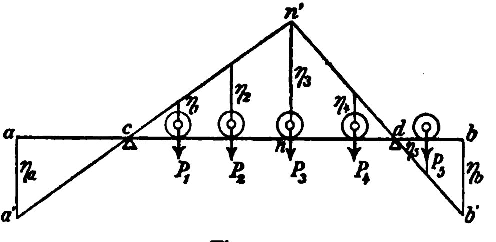


Fig. 5.

$$\pm Z = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + \cdots + P_m\eta_m = \sum P\eta. \qquad (1)$$

Daraus folgt ohne weiteres auch die Erklärung der gefährlichsten Lastlage:

5. *Diejenige Lage des Lastenzuges ist die gefährlichste, für welche die gesuchte Summen-Einflußgröße ihren Grenzwert erreicht.*

Beispielsweise ist für den Träger ab mit den überstehenden Enden ac und bd (Fig. 5) die Linie $a'cn'db'$ eine Einflußlinie des Momentes

im Querschnitte n. Die Einflußlinie ist für $P = 1$ gezeichnet. Wenn die Einzellast auf ihrer Wanderung in den Stützen c und d ruht, ist das Moment in n gleich Null. Ruht die Last $P = 1$ im Punkte n, so ergibt sich das Moment in n als eine Strecke η_n (I. **61**, b). Sobald man also die Strecke $nn' = \eta_n$ im Lastpunkte n als Ordinate aufträgt, ist der Gesamtverlauf der Einflußlinie gegeben, weil ja das Moment sowohl auf den Trägerstrecken cn und dn, als auf den überstehenden Enden ac und bd allein von der Größe der Abstände zwischen einem Lastpunkte und dem nächstliegenden Stützpunkte abhängig ist (I. **61**). Für die in der Fig. 5 angegebene Stellung des Lastenzuges ergibt sich danach das Moment

$$M_n = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + P_3\eta_3 + P_4\eta_4 - P_5\eta_5.$$

Um den Grenzwert von M_n zu finden, muß der Lastenzug in seine gefährlichste Lage geschoben werden. Wie diese gefunden werden kann, wird weiterhin angegeben (**6**).

3. **Stetig verteilte Lasten.** Unter I. **64**, a wurde bereits gesagt, wie man stetig verteilte Lasten, z. B. das *Eigengewicht* der Konstruktion, als eine Gruppe von unendlich kleinen Einzellasten auffassen kann, die in unendlich kleinen Abständen aufeinander folgen. Man kann also auch die gefährlichste Lage solcher Lasten mit Hilfe von Einflußlinien auffinden und dazu die Summen-Einflußgröße berechnen, indem man an Stelle der $\sum P\eta$ ein entsprechendes Integral setzt, worin $P = p\,dz$ anzuschreiben ist, wenn p die stetige Last für die Einheit der Trägerlänge bedeutet. Also ist

$$\pm Z = \int p\,dz\,\eta. \tag{2}$$

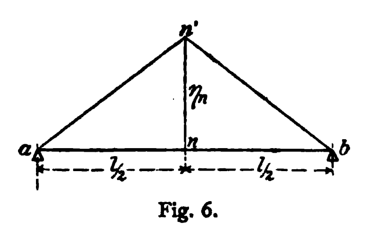


Fig. 6.

Darin kann p veränderlich oder unveränderlich sein. Bei *gleichmäßig* stetiger Belastung ist p unveränderlich. Dann geht Gl. (2) über in

$$\pm Z = p\int \eta\,dz. \tag{3}$$

Das Integral stellt jetzt den Inhalt der Einflußfläche vor. Daraus folgt der Satz:

6. *Für eine gleichmäßig stetige Vollbelastung ist die Summen-Einflußgröße gleich dem Inhalte der Einflußfläche multipliziert mit der Last für die Längeneinheit.*

Beispiel. In der Fig. 6 ist die Einflußlinie $an'b$ des Momentes M_n für die Mitte n des einfachen Trägers ab gezeichnet. η_n ist das Moment für den Lastpunkt n der Einzellast $P = 1$ kg. Also ist

$$\eta_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l}{4} \text{ mkg.}$$

η kann in beliebigem Maßstabe (als Strecke nn') aufgetragen werden.

Es sei nun $l = 10$ m und die gleichmäßig stetige Last $p = 500$ kg/m. Wie groß ist dann bei Vollbelastung des Trägers das Moment in seiner Mitte?

Es ist

$$M = p \int \eta \, dx = p \left(\frac{l \cdot \eta_n}{2} \right) \quad \text{oder}$$

$$M = \frac{p l^2}{8} = \frac{500 \text{ kg} \cdot 100 \text{ m}^2}{m \cdot 8} = 6250 \text{ mkg.}$$

Wenn die Einflußfläche aus positiven und negativen Teilflächen besteht, so gibt es immer mindestens *einen* Punkt der Einflußlinie, für den die Einflußgröße verschwindet. In einem solchen Punkte wechselt die Einflußgröße ihr Vorzeichen. Man sagt:

7. *Ein Lastpunkt, für welchen die Einflußgröße verschwindet, ist eine Lastscheide.*

Aus der Lage der Lastscheide erkennt man ohne weiteres die gefährlichste Lastlage bei stetiger Belastung. In den Fig. 4 und 5 sind die Stützpunkte c und d solche Lastscheiden für den positiven und negativen Wert der Summen-Einflußgröße im Schnitte bei n. Bei alleiniger Vollbelastung der Trägeröffnung cd erscheint in Fig. 4 und 5 der Wert $+Z$. Anderseits entstehen die Werte $-Z$, wenn nur die Ausleger ac und bd voll belastet sind, dabei die Mittelöffnung aber unbelastet bleibt.

Auch die gefährlichste Lage eines Lastenzuges kann beim Vorhandensein einer Lastscheide leicht festgestellt werden, worüber ausführliche Beispiele weiterhin folgen (**6**, b).

4. Einflußlinien für mittelbare Belastung. Im vorstehenden wurde immer angenommen, die Einzellast P rolle bei ihrer Wanderung *unmittelbar* auf dem Träger. Diese Art der Belastung bildet aber bei Konstruktionen von einiger Bedeutung nicht die Regel. Meistens werden die Lasten, wie dies im ersten Bande (I. **10**, S. 18—19, Fig. 11 und 12) ausführlich geschildert worden ist, durch sog. *Querkonstruktionen* mittelbar auf die Träger übertragen (**1**, c).

Wir wollen, wie in der Fig. 7 dargestellt ist, jetzt eine mittelbare Lastübertragung voraussetzen und betrachten dabei ein beliebiges Querträger*feld*, dessen sog. *Feldweite* gleich a sei. 1 und 2 sind die Punkte des Trägers, in welchen die Last P übertragen wird. Liegt dann der

Lastpunkt m im Abstande z vom rechtsseitigen Querträger 2, so übt die Last P in dieser Lage in den Punkten 1 und 2 die Druckkräfte P_1 und P_2 aus, deren Größen bekannt sind (I. **67**). Man findet

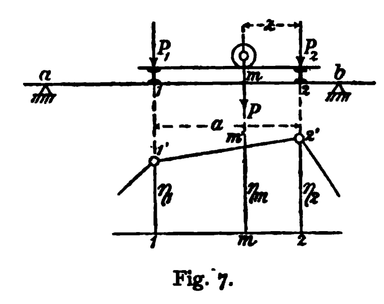


Fig. 7.

$$P_1 = P\left(\frac{z}{a}\right),$$

$$P_2 = P\left(\frac{a-z}{a}\right).$$

Der gesamte Einfluß dieser beiden Seitenkräfte von P muß für das betrachtete Feld $1-2$ ebenso groß sein, wie der Einfluß der Mittelkraft P selbst. Ist also $1'-2'$ die Einflußlinie innerhalb des Feldes, so ist anzuschreiben

$$P\eta_m = P_1\eta_1 + P_2\eta_2$$

oder

$$P\eta_m = P\eta_1\left(\frac{z}{a}\right) + P\eta_2\left(\frac{a-z}{a}\right),$$

d. i.

$$\eta_m = \eta_1\frac{z}{a} + \eta_2\left(\frac{a-z}{a}\right).$$

Die Einflußgrößen η_1 und η_2, sowie auch die Feldweite a sind in jedem Lastfalle Unveränderliche. η_m entspricht danach der Gleichung einer geraden Linie. In Worten:

8. *In jedem Querträgerfelde ist die Einflußlinie eine Gerade.*

Dieser Satz ist für das Zeichnen von Einflußlinien von großer Bedeutung.

5. Einflußlinien der äußern Kräfte. Es kommen hier die *Stützenkraft*, die *Querkraft* und das *Moment* in Betracht, wobei immer unmittelbare und mittelbare Belastung zu unterscheiden ist.

Die Einflußlinie einer Stützenkraft ist insofern von grundlegender Bedeutung, als aus ihr die übrigen Einflußlinien abgeleitet werden. Denn für denjenigen Trägerteil, auf welchem die wandernde Einzellast augenblicklich *nicht* liegt, ist immer die Querkraft gleich der Stützenkraft und das Moment gleich dem Produkte aus der Stützenkraft und ihrem Abstande von dem fraglichen Querschnitte n. Beim Zeichnen einer Einflußlinie ist es also bequem, zur Zeit immer nur denjenigen links oder rechts vom fraglichen Querschnitte n liegenden Trägerteil zu betrachten, auf welchem die Einzellast augenblicklich *nicht* rollt, weil dann als einzigste äußere Kraft nur eine Stützenkraft vorkommt.

a. **Die Stützenkraft.** (Fig. 8.) Analytisch berechnet man eine Stützenkraft am einfachsten aus dem statischen Momente bezogen auf den ihr gegenüberliegenden Stützpunkt:

$$A = P\left(\frac{l-z}{l}\right)$$

$$B = P\left(\frac{z}{l}\right),$$

Fig. 8.

wobei

$$A + B = P$$

ist. Für die *Einheit* der Last P — die sog. *Lasteinheit* — bestehen also die Beziehungen

$$\frac{A}{l-z} = \frac{1}{l}$$

und

$$\frac{B}{z} = \frac{1}{l}.$$

Für $P = 1$ werden aber A und B im Lastpunkte m als eine Strecke η_m aufgetragen. Danach erhält man für die Einflußlinie $a'b$ der Stützenkraft A die Bedingung

$$\frac{\eta_{ma}}{l-z} = \frac{1}{l}$$

und für die Einflußlinie ab' der Stützenkraft B

$$\frac{\eta_{mb}}{z} = \frac{1}{l}.$$

In Worten:

Die Einflußfläche einer Stützenkraft bildet ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete die Trägerlinie und dessen andere Kathete die Strecke $P = 1$ bildet.

Dieser Satz gilt auch für *mittelbare* Belastung (Fig. 8). Denn wenn die Einzellast in einem der Querträgerpunkte 1 bis 4 liegt, ist es gleich, ob man dort zur Bestimmung von η unmittelbare oder mittelbare Übertragung voraussetzt. In jedem Falle erhält man das betreffende η der Fig. 8. Außerdem ist aber die Einflußlinie in jedem Querträgerfelde eine Gerade. Die Linien $a'b$ und ab' bleiben demnach auch für mittelbare Lastübertragung gültig.

b. Die Querkraft. Es sei n der Querschnitt, für welchen die Einflußlinie der Querkraft Q_n gezeichnet werden soll (Fig. 9). Dann ist *für den Trägerteil* an und solange die Einzellast auf dem Trägerteile bn rollt,

$$Q_n = A.$$

Überschreitet P den Punkt n, so ist *für den Trägerteil* an

$$Q_n = A - P.$$

Weil aber

$$P = A + B,$$

so ist im letzten Falle auch

$$Q_n = -B.$$

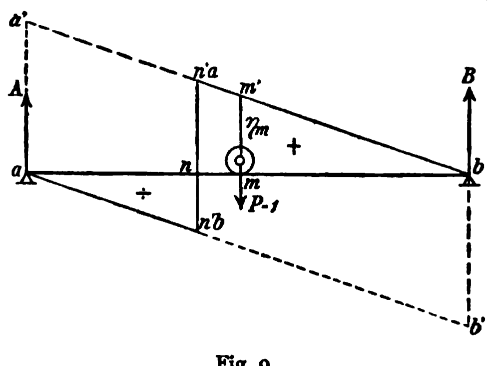


Fig. 9.

Daraus folgt ohne weiteres die in der Fig. 9 gegebene Darstellung der Einflußlinie $a—n'b—n'a—b$ für die Querkraft Q_n bei *unmittelbarer* Belastung. Die Grundlage der Darstellung bilden die beiden Einflußlinien $a'b$ und ab' für die Stützenkräfte $+A$ und $-B$. Die Strecken aa' und bb' sind also gleich der Lasteinheit zu machen und dabei erstere positiv, letztere negativ aufzutragen.

n ist die Lastscheide: Es gibt also in n stets ein

$$\max. + Q_n$$

und ein

$$\max. - Q_n,$$

die entstehen, je nachdem die positive oder die negative Einflußteilfläche *voll* belastet wird.

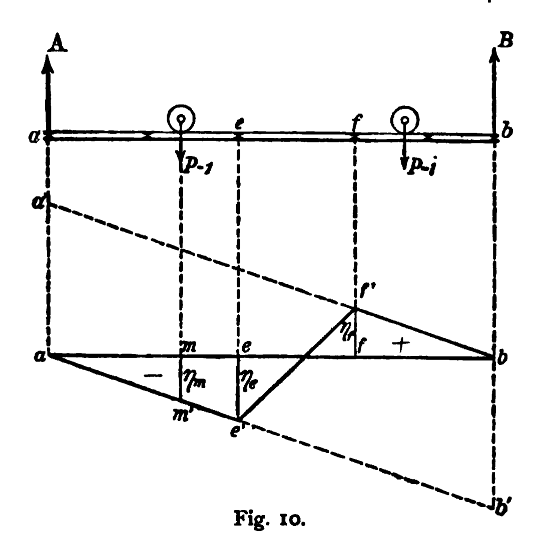


Fig. 10.

Bei *mittlerer* Belastung verändert die Einflußfläche ihre Gestalt innerhalb desjenigen Querträgerfeldes, in welchem der fragliche Querschnitt liegt, für den die Einflußlinie gezeichnet werden soll (Fig. 10). Die sonstigen Grundlagen der Darstellung aus der Fig. 9 bleiben bestehen. Das erkennt man leicht, wenn man zuerst die Wanderung der

Einzellast auf einer der beiden *außerhalb des fraglichen Feldes ef* liegenden Trägerstrecken betrachtet.

Liegt nämlich P innerhalb b und f, so ist

$$Q_n = A,$$

liegt aber P innerhalb a und e, so ist

$$Q_n = -B.$$

Deshalb zeichnet man die Einflußgrößen η_e und η_f mit Hilfe der Einflußlinien für $-B$ und $+A$, also mit Hilfe der Geraden ab' und $a'b$.

Weil innerhalb des fraglichen Feldes die Einflußlinie stets eine Gerade ist, so erhält man in der Linie $ae'f'b$ die gesuchte Einflußlinie. *Ihre Gestalt ist unabhängig von der Lage des Schnittes n im Felde*; der Grenzwert der Querkraft fällt deshalb für jeden Schnitt im Felde gleich groß aus.

Man beachte schließlich, daß in den Fig. 9 und 10 die Querkraft für den *linken* Trägerteil dargestellt wurde. Für den *rechten* Trägerteil hätte man zwar die gleiche Einflußfläche erhalten, aber in anderer Lage und mit entgegengesetzten Vorzeichen der Teilflächen.

c. Das Moment. 1. *Für einen zwischen den Stützen liegenden Momentenpunkt.* Wir betrachten zuerst die unmittelbare Belastung (Fig. 11). n sei der fragliche Querschnitt zwischen den Stützen a und b, für welchen die Einflußlinie des Momentes M_n gezeichnet werden soll. Bleibt die Einzellast P innerhalb der Trägerstrecke bn, so ist das Moment

$$M_n = A \cdot x.$$

Bewegt sich P dagegen zwischen a und n, so ist das Moment

$$M_n = B \cdot x'.$$

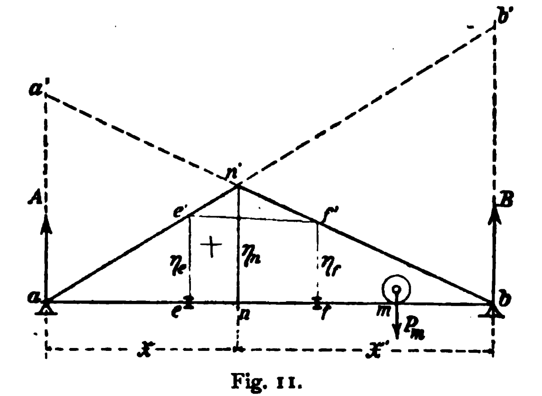


Fig. 11.

Auch hier bilden die Einflußlinien der Stützenkräfte A und B die Grundlage der Darstellung, insofern als deren mit x oder x' multiplizierten Ordinaten für jeden Lastpunkt m der rechts oder links vom fraglichen Schnitte liegenden Trägerstrecke die gesuchte Einflußgröße

$$M_n = P_m \eta_m$$

ergeben müssen.

Trägt man also im Stützpunkte a als Ordinate eine Strecke

$$aa' = \alpha x$$

auf, wobei der *Multiplikator* α eine beliebige Zahl vorstellt,

desgleichen in b eine Strecke

$$bb' = \alpha x',$$

verbindet a' mit b und b' mit a durch je eine Gerade, so schneiden sich diese beiden Geraden im fraglichen Schnitte n und die Linie $an'b$ ist die gesuchte Einflußlinie des Momentes M_n. Daß die Geraden $a'b$ und ab' sich *auf der durch den Momentenpunkt n verlaufenden Senkrechten schneiden müssen*, folgt aus der Bedingung

$$A \cdot x = B \cdot x'.$$

Für $P_m = 1$ ist allgemein für den beliebigen Lastpunkt m:

$$M_n = 1 \cdot \alpha \cdot \eta_m$$

Wenn es die Maßstäbe der Darstellung zweckmäßig erscheinen lassen, wählt man den *Multiplikator* $\alpha = 1$.

Wie die Einflußlinie für M_n sich ändert, wenn der Punkt n innerhalb eines Querträgerfeldes zu liegen kommt, ist in der Fig. 11 mit roten Linien angegeben. Die Einflußlinie bildet dann den Linienzug $ae'f'b$, weil sie einerseits im Querträgerfelde eine Gerade sein muß und anderseits außerhalb dieses Feldes ihre Gestalt nicht ändern kann.

Wo nach obigem auch der Punkt n innerhalb der Stützen liegen möge, immer legen die mit Hilfe seiner Abstände x und x' gezeichneten Geraden $a'b$ und $b'a$ die *Grenzen der Einflußfläche* fest. Die beiden Geraden sollen deshalb künftig die *Grenzlinien* der Einflußfläche heißen. Dabei wolle man wohl beachten, wie jede der beiden Grenzlinien den Einfluß einer der Stützenkräfte A oder B darstellt, je nachdem der *rechts* oder *links* vom Momentenpunkte liegende Trägerteil, auf welchem die Einzellast augenblicklich nicht liegt, betrachtet wird.

Es wird sich zeigen, daß auch für *außerhalb* der Stützen liegende Momentenpunkte die Grenzlinien der zugehörigen Einflußfläche nach gleichen Grundsätzen gezeichnet werden können.

2. *Für einen außerhalb der Stützen liegenden Momentenpunkt* (Fig. 12). Die Abstände des Momentenpunktes n von den Stützen a und b seien, wie vorher, x und x'. Die Einzellast P wirke *unmittelbar* und ruhe auf ihrer Wanderung im Punkte m. Denkt man sich nun in m einen Schnitt durch die Konstruktion gelegt, so kann man entweder den linken

Trägerteil am oder den rechten Teil bm betrachten und für jeden Teil die Einflußlinie des Momentes in Beziehung auf n darstellen. Man erhält (wie unter 1)

$$M_n = -Ax$$

oder

$$M_n = +Bx',$$

wenn man bedenkt, daß das linksdrehende Moment für den linken Teil *negativ*, für den rechten Teil aber *positiv* zu nehmen ist (I. **66**).

Daraus folgt (nach vorigem) ohne weiteres die Darstellung: Mache die Strecke aa' der linken Stützenlotrechten gleich $-\alpha x$, desgleichen die Strecke bb' der rechten Stützenlotrechten gleich $+\alpha x'$ und zeichne die *Grenzlinien* ab' und ba'. Dann ist $att'b$ die gesuchte *Einflußfläche*, wobei tt' die Richtung des durch m verlaufenden Querschnittes angibt.

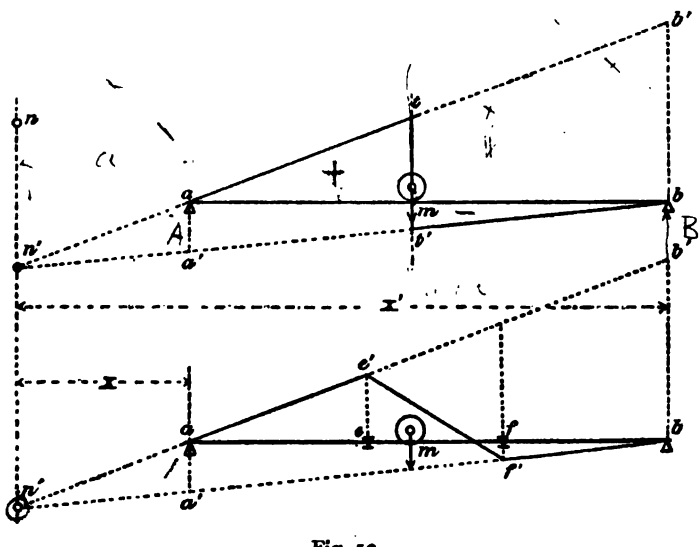


Fig. 12.

Auch hier *schneiden sich die Grenzlinien der Einflußfläche auf der durch den Momentenpunkt gelegten Senkrechten* nn'. Das geht unmittelbar aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $n'aa'$ und $n'bb'$ hervor.

Wirkt die Einzellast P mittelbar, so tritt an Stelle des Schnittes in m *das Querträgerfeld* ef, in welchem m beliebig belegen sein kann. Die Einflußlinie ist dann im Felde ef eine Gerade $e'f'$ und die Einflußfläche nimmt die Gestalt $ae'f'b$ an. Im übrigen bleibt die Darstellung ungeändert.

Die Einflußlinien für ein Moment in Bezug auf einen innerhalb oder außerhalb der Stützen liegenden Punkt sind besonders wichtig für die Darstellung der Einflußlinien der Stabkräfte von Fachwerken (**18**).

d. Belastungsgleichwerte. In manchen praktischen Fällen rechnet man mit einer gleichmäßig und stetig verteilten Last einfacher, als mit einem Lastenzuge. In solchen Fällen hat es deshalb einen gewissen Wert, ein Verfahren zu kennen, mit dessen Hilfe auf einfache Art *für irgend eine gefährlichste Lage eines Lastenzuges eine stetig verteilte Belastung gefunden werden kann*, *die der Wirkung des Lastenzuges gleichwertig ist* und deshalb Belastungsgleichwert genannt wird.

Für einen Lastenzug ist die Summen-Einflußgröße

$$Z = \sum P\eta,$$

für gleichmäßig stetige Last dagegen gilt

$$Z = p\int \eta\, dz$$

oder

$$Z = pF_e,$$

wenn F_e den Inhalt der belasteten Einflußfläche bedeutet.

Soll nun Z für beide Belastungsfälle gleich groß sein, so folgt

$$p = \frac{\sum P\eta}{F_e}, \tag{4}$$

woraus der Belastungsgleichwert p zu berechnen ist. p ist danach veränderlich mit der Gestalt und dem Inhalte der Einflußfläche. Es wird deshalb wohl möglich sein, für irgend eine bestimmte Einflußgröße einen Belastungsgleichwert zu berechnen, nicht aber einen solchen, der z. B. zugleich für ein Moment und für eine Querkraft, oder für ein Moment in verschiedenen Schnitten gebraucht werden könnte. Dem widerspricht die Tatsache, daß im allgemeinen die Einflußflächen zweier verschiedener Einflußgrößen auch verschiedene Gestalt und Größe zeigen.

Beruht die Verschiedenheit der Einflußflächen nur darin, daß sie mit verschiedenen *Multiplikatoren* (S. 12) gezeichnet sind, so lassen sich selbstverständlich die Belastungsgleichwerte p immer noch berechnen, denn man erhält dann

$$p = \frac{\mathfrak{m}\sum P\eta}{\mathfrak{m}\cdot F_e} = \frac{\sum P\eta}{F_e},$$

wenn $\mathfrak{m}$ der Multiplikator war.

In allen anderen Fällen ist es unmöglich, einen Belastungsgleichwert p zu finden, der für alle Trägerschnitte zu brauchen ist, nicht einmal

für ein Moment oder eine Querkraft. Deshalb erscheint es dem Verfasser nicht ratsam, auf die weiteren Versuche, wenigstens annäherungsweise solche Werte von p zu finden, hier näher einzugehen. Er ist vielmehr der Meinung, daß selbst Praktiker recht wohl ohne Benutzung von Belastungsgleichwerten auskommen können, wenn sie die Theorie der Einflußflächen richtig handhaben. Mit deren Hife bestimmt man in den meisten Fällen sogar die Grenzwerte von Einflußgrößen für einen Lastenzug bequemer als für stetige Lasten.

Ausführliche Darlegungen über den vorliegenden Gegenstand findet man bei WINKLER in der Theorie der Brücken I.[1]

6. Allgemeine Kennzeichen der gefährlichsten Lastlage.

a. Summen-Einflußlinien. Die gefährlichste Lage *stetiger* Lasten ist in jedem Falle aus der Gestalt der Einflußlinie ohne weiteres zu erkennen. Denn die *Lastscheiden* sind hierbei allein maßgebend (S. 7). Etwas anders liegt die Sache, wenn es sich um einen Lastenzug handelt. Vorhandene Lastscheiden geben auch hier einen wichtigen Anhalt für die gefährlichste Lage des Zuges, aber im allgemeinen geht es dabei nicht ohne ein wenig Probieren ab.

Ein scheinbar einfaches Mittel besteht darin, daß man eine sog. *Summen-Einflußlinie* zeichnet, die man erhält, wenn man die Summen-Einflußgrößen

$$Z = \sum P\eta$$

in irgend einem Lastpunkte des wandernden Zuges als Ordinaten aufträgt. *Dann liegen die Endpunkte aller Strecken Z in einer Linie, die man Summen-Einflußlinie nennt und deren Ordinaten aus der Einflußlinie erhalten werden.*

Das Mittel der Darstellung einer Summen-Einflußlinie[2] ist aber nur scheinbar ein einfaches. In praktischen Fällen bedarf es eines solchen nicht. Wohl aber läßt sich aus der Betrachtung der allgemeinen Gestalt einer Summen-Einflußlinie eine wichtige Regel gewinnen, bei deren Anwendung man die gefährlichste Lastlage *unmittelbar aus der Gestalt einer Einflußlinie* entweder ablesen oder doch insoweit erkennen kann, daß weiteres Probieren auf ein Mindestmaß beschränkt wird. Diese Regel soll zuerst hergeleitet und dazu die in Fig. 13 dargestellte Summen-Einflußlinie benutzt werden.

---

[1] S. 326. — Vgl. auch die neuern Arbeiten auf gleichem Gebiete: JOHNSON, Modern framed structures. 1897. — PODHAISKY, Zeitschr. d. Österr. Ing.- und Arch.-Ver. 1897.

[2] MEHRTENS, Summen-Einflußlinien und A-Polygone. Centralbl. der Bauverw. 1896.

Die zugrunde gelegte Einflußlinie ist für $P = 1$ gezeichnet. Sie zählt die Eckpunkte 1 bis 6. Der Lastenzug I—II—III—IV wandert zwischen den Punkten 0 und 7 und dabei ist die jedesmalige Summen-Einflußgröße immer im Lastpunkte *der ersten Last* aufgetragen worden.

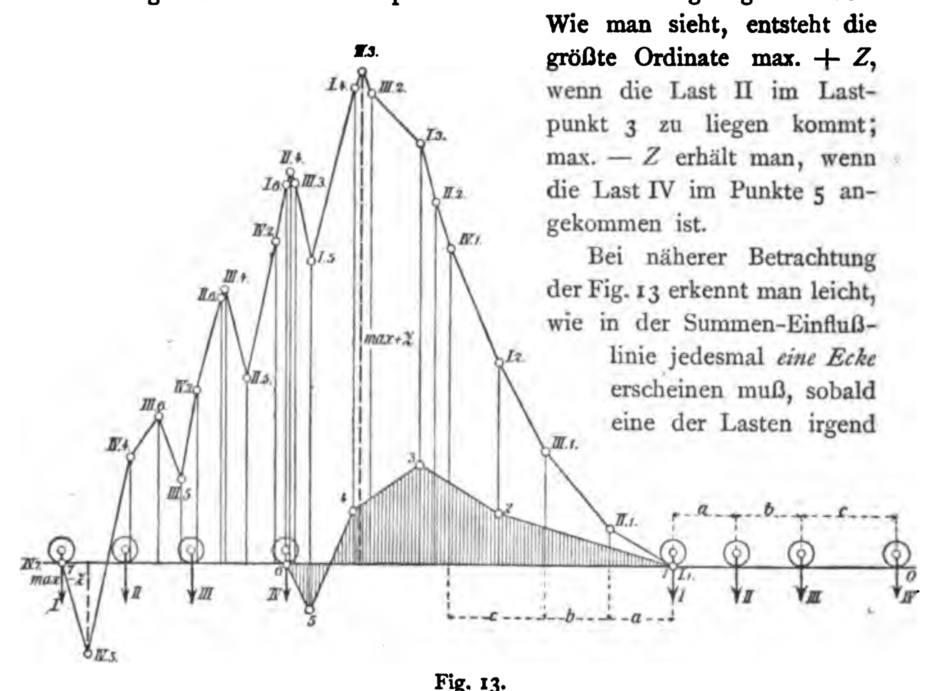


Fig. 13.

Wie man sieht, entsteht die größte Ordinate max. + Z, wenn die Last II im Lastpunkt 3 zu liegen kommt; max. — Z erhält man, wenn die Last IV im Punkte 5 angekommen ist.

Bei näherer Betrachtung der Fig. 13 erkennt man leicht, wie in der Summen-Einflußlinie jedesmal *eine Ecke* erscheinen muß, sobald eine der Lasten irgend eine Ecke der Einflußlinie überschreitet. Wenn z. B. die Last II im Lastpunkte 3 anlangt, entsteht die Ecke II. 3, u. s. f. Jede Last überschreitet alle 6 Ecken der Einflußlinie, das gibt $4 \cdot 6 = 24$ Ecken der Summen-Einflußlinie, weil 4 Lasten vorhanden sind.

Die Eckenzahl einer Summen-Einflußlinie ist gleich dem Produkte aus der Zahl der Lasten in die Eckenzahl der Einflußlinie.

Man unterscheidet *aus*springende und *ein*springende Ecken, je nachdem deren in der Einflußfläche liegende Winkel kleiner oder größer als 180° sind. Die Punkte 1, 2 und 6 der Einflußlinie gehören zu einspringenden, 3, 4 und 5 dagegen zu ausspringenden Ecken. In 1 und 6 hat man sich die Einflußlinie durch die Wagerechten 1—0 und 6—7 ergänzt zu denken.

Aus der Fig. 13 ist zu ersehen, wie durch jede Last beim Überschreiten einer Ecke der Einflußlinie in der Summen-Einflußlinie eine

gleichartige Ecke entstehen muß. Ferner ist ohne weiteres zu erkennen, *daß die Grenzwerte von Z nur an einer ausspringenden Ecke der Summen-Einflußlinie liegen können.* Dieser Ecke entspricht aber immer eine Lastlage, bei welcher eine Last an einer *aus*springenden Ecke der zugehörigen Einflußlinie liegt. Daraus folgt die Regel:

Bei der gefährlichsten Lastlage liegt stets eine der Lasten des Lastenzuges an einer ausspringenden Ecke der Einflußlinie.

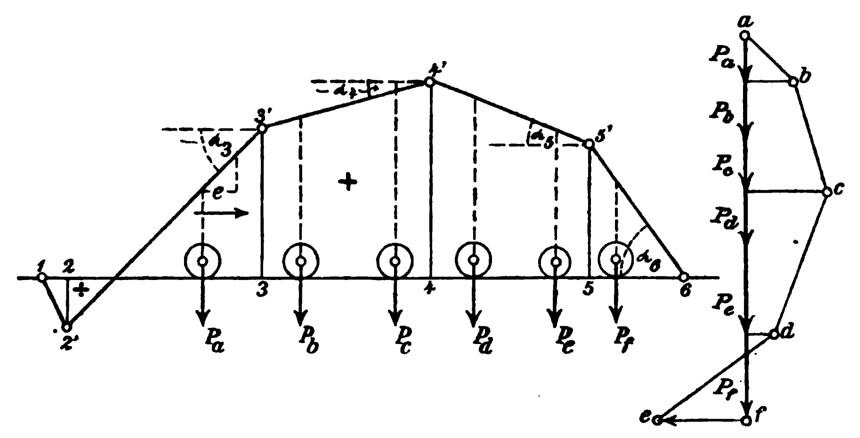


Fig. 14.

b. Feststellen der gefährlichsten Lage eines Zuges. Ist die Einflußlinie ein Vieleck (Fig. 14), so kann man die gefährlichste Lastlage nach dem folgenden graphischen Verfahren finden[1].

An irgend einer der ausspringenden Ecken muß eine der Lasten P_a bis P_f liegen, damit $+Z$ seinen Grenzwert erreicht. Die in der Fig. 14 gezeichnete Stellung des Zuges ist also nicht die gefährlichste. Der Zug muß zunächst soweit verschoben werden, bis eine Last unter einer ausspringenden Ecke steht. Es fragt sich nur, ob man nach links oder rechts verschieben soll. Das hängt davon ab, ob bei der Verschiebung Z kleiner oder größer wird.

Es sei die Änderung von Z bei einer Verschiebung des Zuges um eine Strecke e gleich ΔZ. Um nun zu sehen, ob ΔZ positiv oder negativ wird, verschiebe man nach Gutdünken z. B. nach rechts. Dann ist (wenn die *Vorzeichen* der Werte von $\operatorname{tg}\alpha$ in Sonderfällen beachtet werden):

---

[1] Winkler, Theorie der Brücken. Äußere Kräfte der Balkenträger. III. Aufl. 1886. S. 39.

$$\Delta Z = e[P_a \operatorname{tg} \alpha_3 + (P_b + P_c) \operatorname{tg} \alpha_4 + (P_d + P_e) \operatorname{tg} \alpha_5 + P_f \operatorname{tg} \alpha_6]$$

oder

$$\Delta Z = e \sum R \operatorname{tg} \alpha,$$

wenn nach erfolgter Verschiebung R die Mittelkraft einer zwischen zwei benachbarten Lastpunkten liegenden Lastgruppe vorstellt.

$\sum R \operatorname{tg} \alpha$ ist leicht graphisch darzustellen: Man zeichne die Kraftlinie af nach beliebigem Maßstabe. Sodann beginne man in a einen *Normalenzug* $abcde$ zu zeichnen, in welchem die einzelnen Seiten ($ab - bc - cd - de$) zu den betreffenden Seiten der Einflußlinie senkrecht stehen, wobei außerdem die durch b, c, d und e gezogenen Wagrechten auf der Kraftlinie af nacheinander alle in Frage kommenden Mittelkräfte R abschneiden.

Die Strecke ef ist dann gleich der $\sum R \operatorname{tg} \alpha$. *Sie ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem das Ende e des Normalenzuges auf derselben Seite liegt, wo dieser angefangen hat, oder nicht.* Im vorliegenden Falle ist ef *negativ* ausgefallen. Das bedeutet eine *Abnahme* von Z beim Schieben des Zuges nach rechts. Es muß also solange nach links geschoben werden, bis *eine* der Lasten unter eine ausspringende Ecke tritt. Ob damit schon die gefährlichste Lastlage gefunden ist, läßt sich im allgemeinen noch nicht entscheiden. Schiebt man aber dann noch eine Strecke e weiter nach links und zeichnet für die dabei erhaltene neue Lastlage abermals, wie erläutert, einen Normalenzug, so war die erstgefundene Lastlage in der Tat die gefährlichste, wenn sich jetzt die Strecke ef wieder negativ ergeben sollte.

In den meisten praktischen Fällen bedarf es einer mehrmaligen Zeichnung des Normalenzuges nicht. In einzelnen Fällen gibt es auch noch andere Kennzeichen der gefährlichsten Lastlage, so daß man überhaupt auf das Hilfsmittel des Normalenzuges verzichten kann. Darüber vgl. die Beispiele unter **7**.

Daß man den *Normalenzug* auch um 90° drehen kann und in diesem Falle einen *Parallelenzug* erhält, ändert an den Grundlagen des obigen Verfahrens nichts.

7. Die gefährlichste Lastlage in Sonderfällen.

a. Dreiecks-Einflußfläche (Fig. 15). Eine Last muß an der Ecke 2′ liegen, es fragt sich nur welche? Jedenfalls muß es eine solche sein, daß beim Schieben des Lastenzuges nach links oder rechts

$$\Delta Z = e \sum R \operatorname{tg} \alpha$$

gleich Null wird. Man ziehe also (nach 5) über der wagrecht gelegten Kraftlinie ad (Fig. 16) einen *Parallelenzug* zu den Seiten der Einflußlinie, aber so, daß ΔZ gleich Null wird. Das ist in Fig. 16 geschehen:

$\overline{ab} \parallel 1-2'$

$\overline{bd} \parallel 2'-3.$

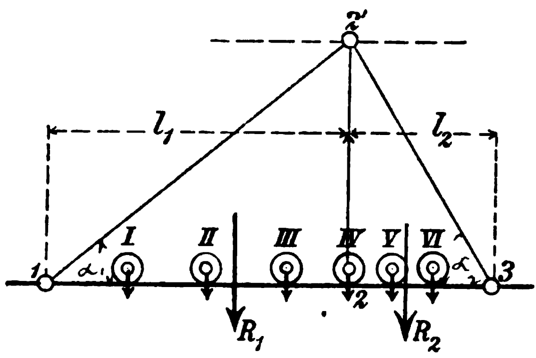


Fig. 15.

Die Senkrechte bc teilt dann den Lastenzug I bis VI in zwei Gruppen. Deren Mittelkräfte R_1 und R_2 entsprechen demnach — weil das Dreieck abd der Einflußfläche ähnlich ist — der Bedingung

$$\frac{R_1}{l_1} = \frac{R_2}{l_2} \cdot \cdot \qquad (5)$$

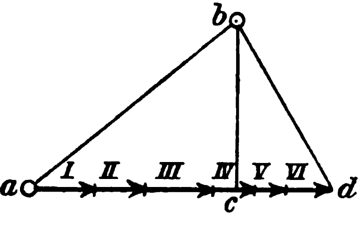


Fig. 16.

In Wirklichkeit ist aber, wenn eine der Lasten in 2 liegt, das Gewicht des Lastenzugs nicht immer, wie die Gleichung vorschreibt, genau gleichmäßig über die Trägerstrecken 1—2 und 2—3 verteilt. Man darf danach sagen:

1. *Bei der gefährlichsten Lastlage muß eine der Lasten unter der ausspringenden Ecke liegen.*

2. *Das Gesamtgewicht der links und rechts von der Ecke liegenden Lastgruppen muß möglichst gleich über die zugehörigen Trägerstrecken* l_1 *und* l_2 *verteilt sein, wobei die unter der Ecke liegende Last zu gleichen Teilen auf beide Strecken entfällt.*

Träfe also der Punkt c der Fig. 16 *mitten* in die Strecke der Last IV, so wäre obige Gl. (5) genau erfüllt. Bei anderer Lage von c ist zu probieren: Je mehr c links, nach der Strecke der Last III, oder rechts, nach der Strecke der Last V hinrückt, desto wahrscheinlicher wird es, daß die gefährlichste Lastlage eintritt, wenn III oder V unter der Ecke liegt.

Beispiel. Der in der Fig. 17 oben dargestellte Lastenzug kann (mit der Last 1 vorn) sowohl nach links als auch nach rechts über den 10 m weit gestützten Träger ab fahren. Die Lasten werden durch

Querträger, die 2 m voneinander entfernt liegen, übertragen. Wie muß der Lastenzug stehen, damit am dritten Querträger (3) von der Stütze *a* gerechnet das Moment seinen Grenzwert erreicht?

Das Moment am Querträger 3 wird (nach I. **67**, b) so berechnet, als ob unmittelbare Lastübertragung stattfindet. Die Einflußfläche des

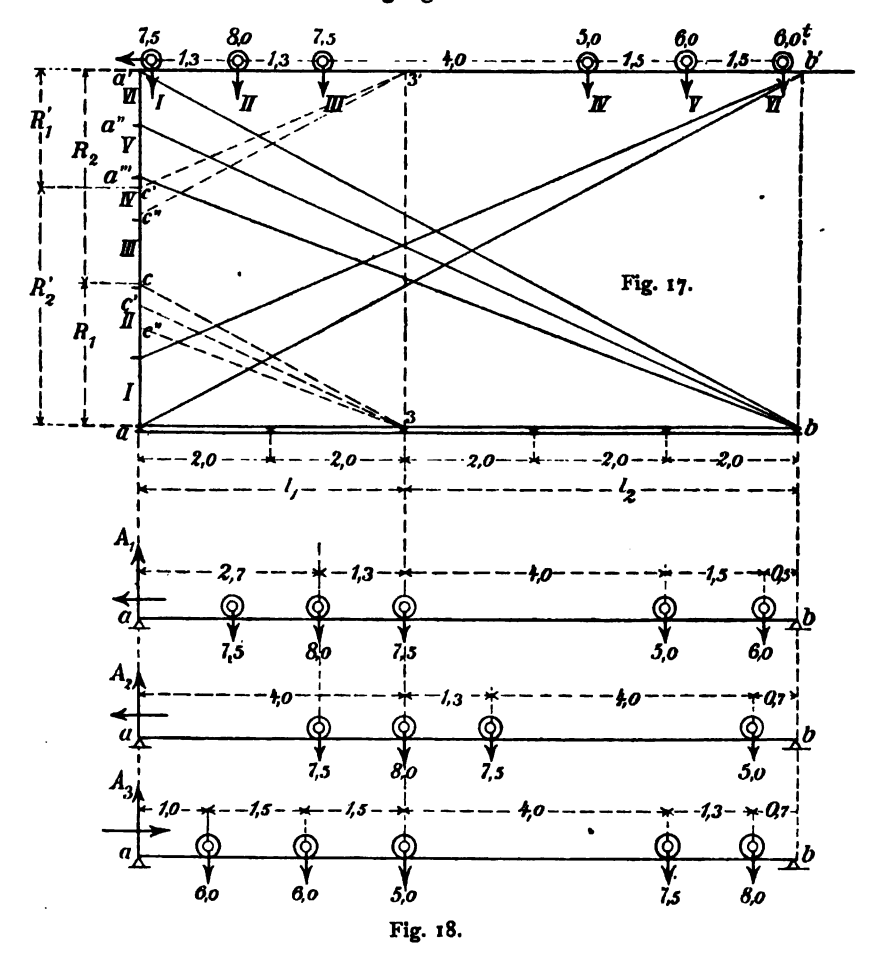


Fig. 17.

Fig. 18.

Momentes ist also *ein Dreieck*, dessen mittlere Ecke senkrecht über 3 liegt (**5**, c). Die gefährlichste Lastlage wird eintreten, wenn die Lasten möglichst gleichmäßig über die Trägerstrecken $a—3 = l_1$ und $b—3 = l_2$ verteilt sind.

Welche der Lasten in 3 liegen muß, erfährt man am einfachsten graphisch, indem man, wie in Fig. 17 geschehen, auf der Senkrechten

in a (in beliebigem Maßstabe) die gegebene Reihe der Lasten als Kraftlinie aa' aufträgt. Verbindet man dann a mit b' und b mit a', zieht ferner zur ba' und ab' in den Punkten 3 und 3' je eine Parallele 3—c und 3'—c', so treffen die Punkte c und c' diejenige Laststrecke der Kraftlinie, die wahrscheinlich in 3 zu liegen kommen muß. Das wäre für die Linksfahrt die Last III, für die Rechtsfahrt die Last IV. Denn für beide Fahrten wird die Bedingung der Gl. (5) erfüllt. Es ist nämlich, wie aus der Fig. 17 ohne weiteres zu ersehen,

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2} \text{ und auch } \frac{R_1'}{R_2'} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Legt man jetzt für die Linksfahrt die Last III in 3, so fällt die Last VI *außerhalb der Stütze b*. Deshalb muß vorerst noch untersucht werden, ob auch *ohne die Last* VI die gefährlichste Lage des Zuges noch bestehen bleibt. Zu diesem Zwecke wird die Gerade ba'' und deren Parallele 3—c' gezogen. Diese schneidet nicht mehr auf der Last III, sondern auf II ein, sodaß jetzt voraussichtlich II in 3 liegen muß, um die gefährlichste Lastlage zu erzeugen. Bei dieser Lage gerät aber auch die Last V außerhalb der Stütze b, sodaß eine nochmalige Untersuchung durch Ziehen der ba''' und der Parallelen 3—c'' nötig wird. Auch hierbei bleibt II die Last, die in 3 liegen muß.

Nach obigem gibt es für die Linksfahrt zwei Möglichkeiten: In 3 liegt entweder die Last III der Zuggruppe I bis V oder der Last II der Gruppe I bis IV. Im ersten Falle ist

$$\frac{R_1}{l_1} = \frac{7{,}5 + 8{,}0 + \frac{7{,}5}{2}}{4{,}0} = 4{,}81$$

$$\frac{R_2}{l_2} = \frac{\frac{7{,}5}{2} + 5{,}0 + 6{,}0}{6{,}0} = 2{,}46.$$

Im zweiten Falle:

$$\frac{R_1}{l_1} = \frac{7{,}5 + \frac{8{,}0}{2}}{4{,}0} = 2{,}88$$

$$\frac{R_2}{l_2} = \frac{\frac{8{,}0}{2} + 7{,}5 + 5{,}0}{6{,}0} = 2{,}75.$$

Beide Lastlagen sind in der Fig. 18 dargestellt. Danach erhält man für das Moment am Querträger 3:

im 1. Falle: $M_1 = A_1 \cdot 4{,}0 - (7{,}5 \cdot 2{,}6 + 8{,}0 \cdot 1{,}3) = 42{,}46$ mt
» 2. » : $M_2 = A_2 \cdot 4{,}0 - (7{,}5 \cdot 1{,}3) \qquad = 46{,}85$ mt.

Darin ist

$$A_1 = \frac{(7{,}5 + 8{,}0 + 7{,}5)(10 - 2{,}7) + 5{,}0 \cdot 2{,}0 + 6{,}0 \cdot 0{,}5}{10} = 18{,}09 \text{ t}$$

$$A_2 = \frac{(7{,}5 + 8{,}0 + 7{,}5)\,6{,}0 + 5{,}0 \cdot 0{,}7}{10} = 14{,}15 \text{ t.}$$

Damit ist entschieden, daß bei der *Links*fahrt die Last II in 3 liegen muß.

Bei der *Rechts*fahrt nimmt die Untersuchung einen gleichen Gang. Die Parallele $3'$—c' trifft die Last IV. Liegt aber IV in 3, so fällt I außerhalb der Stütze b. Nach erfolgter Ausschaltung der Last I in der Kraftlinie trifft der Punkt c'' der zweiten Parallelen $3'$—c'' ebenfalls die Last IV. Es muß also IV in 3 liegen, denn wollte man III dorthin schieben, so kämen die drei Lasten IV bis VI außerhalb von a zu liegen.

Das statische Moment bei der Rechtsfahrt ergibt sich nach der Fig. 18:

$$M_3 = A_3 \cdot 4{,}0 - 6{,}0\,(1{,}5 + 3{,}0) = 32{,}84 \text{ mt,}$$

wobei

$$A_3 = \frac{6{,}0\,(7{,}5 + 9{,}0) + 5{,}0 \cdot 6{,}0 + 7{,}5 \cdot 2{,}0 + 8{,}0 \cdot 0{,}7}{10} = 14{,}96 \text{ t.}$$

Unter allen drei in Fig. 18 dargestellten Lagen des Zuges ist also die zweite die gefährlichste, weil dafür das Moment in 3 am größten wird.

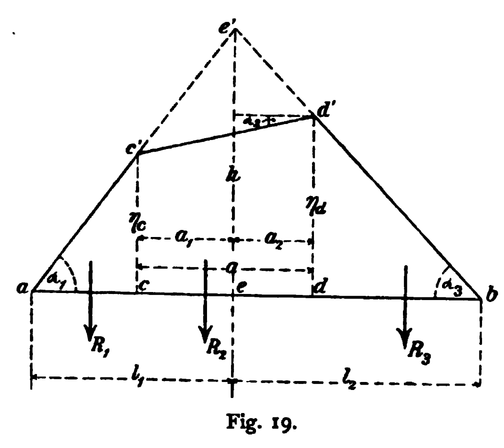


Fig. 19.

b. Vierecks-Einflußfläche. Die Fläche $ac'd'b$ sei derart belastet, daß in den Strecken ac, cd und bd je eine Lastgruppe liegt, deren Mittelkräfte in der Fig. 19 aufeinanderfolgend mit R_1, R_2 und R_3 bezeichnet sind. Bei einer Verschiebung des Lastenzuges um die Strecke e nach rechts beträgt die Änderung der Summen-Einflußgröße Z

$$\Delta Z = e \sum R \operatorname{tg} \alpha.$$

Es wird darauf ankommen, diesen Summenausdruck auf eine leicht deutbare Form zu bringen. Zu diesem Zwecke führen wir die in der

Fig. 19 eingeschriebenen geometrischen Bezeichnungen ein: die Höhe ee' des Dreiecks, das entsteht, wenn man die Seiten ac' und bd' verlängert, sei h. Die Strecken ae und be seien l_1 und l_2. Dann ist zunächst anzuschreiben:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{h}{l_1}; \quad \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{-h}{l_2}.$$

Ferner folgt aus

$$\frac{\eta_c}{h} = \frac{l_1 - a_1}{l_1} \quad \text{und} \quad \frac{\eta_d}{h} = \frac{l_2 - a_2}{l_2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\eta_d - \eta_c}{a} = \frac{h}{a}\left(\frac{a_1}{l_1} - \frac{a_2}{l_2}\right)$$

und endlich

$$\varDelta Z = e h\left[\frac{R_1}{l_1} + \frac{R_2}{a}\left(\frac{a_1}{l_1} - \frac{a_2}{l_2}\right) - \frac{R_3}{l_2}\right]$$

oder

$$\varDelta Z = e h\left[\frac{R_1 + R_2 \frac{a_1}{a}}{l_1} - \frac{R_3 + R_2 \frac{a_2}{a}}{l_2}\right].$$

Die gefährlichste Lastlage ergibt sich aus der Bedingung $\varDelta Z = 0$, d. i.

$$\frac{R_1 + R_2 \frac{a_1}{a}}{l_1} = \frac{R_3 + R_2 \frac{a_2}{a}}{l_2}. \tag{6}$$

In Worten: *In der durch Verlängern der äußern Vierecksseiten erhaltenen Dreiecksfläche müssen die links und rechts von deren Spitze liegenden Lastgruppen möglichst gleich über die zugehörigen Trägerstrecken l_1 und l_2 verteilt sein, wobei aber die Mittelkraft der unter die mittlere Vierecksseite fallenden Lasten auf die unter den beiden ausspringenden Ecken des Vierecks liegenden Lastpunkte nach dem Verhältnisse $a_1 : a_2$ zu verteilen ist.*

Es fragt sich jetzt nur noch, welche der Lasten unter einer der beiden ausspringenden Ecken c' und d' des Vierecks liegen muß, um vorstehende Bedingung zu erfüllen. Am bequemsten entscheidet man dies graphisch, wie es das folgende Beispiel ausführlich erläutert.

Beispiel. Über einen Träger ab mit drei Querträgerfeldern von je 5 m Weite rollt in der gezeichneten Stellung der Lastenzug I bis VIII (Fig. 20). Bei welcher Lage des Zuges erreicht das Moment im Querschnitt e des mittleren Querträgerfeldes seinen Grenzwert?

Nach **5**, c ist die Einflußfläche des gesuchten Momentes ein *Viereck*, das am einfachsten zu zeichnen ist, wenn man zuerst die Einflußlinie des Momentes für den Schnitt e bei *unmittelbarer* Lastübertragung darstellt. Das ist in der Fig. 20 geschehen. Dabei wurde die senkrechte

Kraftlinie $aa' = l_1$ gemacht und bd' gezogen. Dadurch ist der Punkt e' im Querschnitt bei e und gleichzeitig auch die *Dreiecks*-Einflußfläche $ae'b$ festgelegt. Bei der Nachprüfung muß die Verlängerung von ae' auf der Stützensenkrechten in b die Strecke $bb' = l_2$ abschneiden. Schließlich geben die Querträgersenkrechten in c und d die Punkte c' und d' und damit auch die gesuchte Einflußfläche $ac'd'b$.

Die Gesamtlast des Zuges ist mit Hilfe der zu bd' parallel gelegten Geraden eg nach dem Verhältnis $l_1 : l_2$ geteilt. g trifft die Last VI. Diese ist vorläufig in den Schnitt bei e gelegt, wie Fig. 20 oben darstellt. Bei dieser Lastlage fallen die Lasten IV, V und VI in das Feld cd.

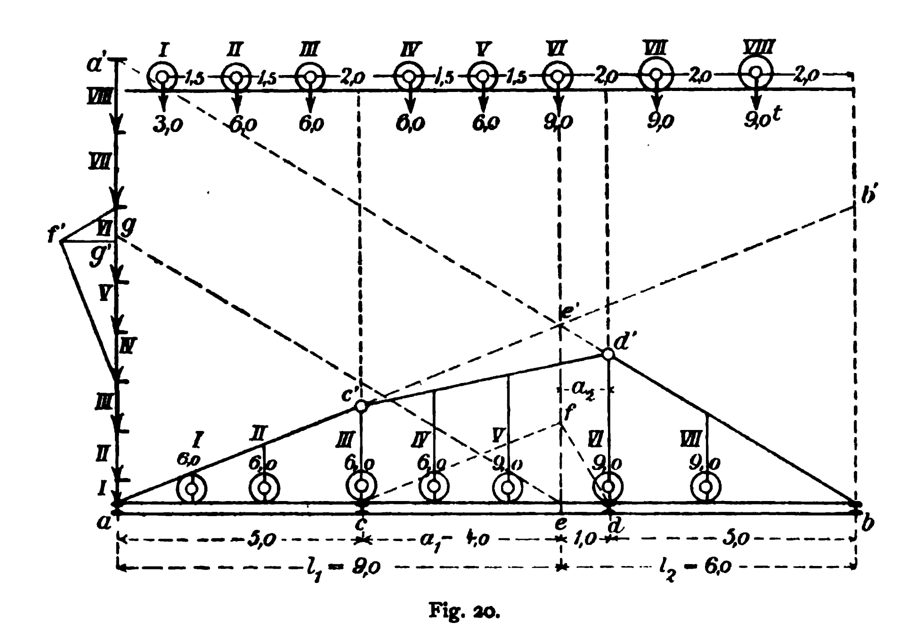


Fig. 20.

Es fragt sich also nur noch, nach welcher Seite man den Zug verschieben muß, damit 1) eine Last unter einer der beiden ausspringenden Ecken c' oder d' zu liegen kommt und 2) die Bedingung der Gl. (6) möglichst nahe erfüllt wird. Um das entscheiden zu können, teilen wir zuerst die Mittelkraft der drei Lasten IV, V, VI nach dem Verhältnis $a_1 : a_2$. Zu dem Zwecke ist das Hilfsdreieck cfd gezeichnet und durch einen *Normalenzug* an entsprechender Stelle der Kraftlinie in ähnlicher Gestalt übertragen worden. Dabei fällt der Teilpunkt g' der Normalen $f'g'$ *unterhalb des Teilpunktes* g, woraus folgt, daß *der Zug nach links zu schieben ist.*

Legen wir zuerst einmal VI in d. Dann ist

$$\frac{R_1 + R_2 \frac{a_1}{a}}{l_1} = \frac{(3{,}0 + 6{,}0 + 6{,}0) + \frac{2 \cdot 6{,}0 \cdot 4{,}0}{5{,}0}}{9{,}0} = 2{,}73$$

und

$$\frac{R_3 + R_2 \frac{a_2}{a}}{l_2} = \frac{2 \cdot 9{,}0 + \frac{2 \cdot 6{,}0 \cdot 1{,}0}{5{,}0}}{6{,}0} = 3{,}4.$$

Danach läge auf der Strecke l_2 zuviel Last. Schieben wir also einmal nach *links*, bis IV in c liegt. Dann ergibt sich

$$\frac{R_1 + R_2 \frac{a_1}{a}}{l_1} = \frac{3 \cdot 6{,}0 + \frac{(6{,}0 + 9{,}0)\, 4{,}0}{5{,}0}}{9{,}0} = 3{,}33$$

und

$$\frac{R_3 + R_2 \frac{a_2}{a}}{l_2} = \frac{2 \cdot 9{,}0 + \frac{(6{,}0 + 9{,}0)\, 1{,}0}{5{,}0}}{6{,}0} = 3{,}50.$$

Eine größere Gleichmäßigkeit der Belastung ist, wie leicht einzusehen, nicht zu erzielen. Bei der gefährlichsten Lage des Zuges muß also IV über dem Querträger c liegen. Wollte man jetzt den entstehenden Grenzwert des Momentes M_e aus der Einflußfläche berechnen, so erhielte man (nach Fig. 20):

$$M_e = \sum P\eta = 6{,}0(0{,}6 + 1{,}20 + 2{,}00 + 2{,}30) + 9{,}0(2{,}6 + 3{,}0 + 1{,}8)$$
$$= 103{,}2 \text{ mt}.$$

Rechnerisch erhielte man:

$$M_e = A \cdot 9{,}0 - \left[6{,}0(7{,}5 + 6 + 4) + \left(6{,}0\,\frac{3{,}5}{5{,}0} + 9{,}0\,\frac{2{,}0}{5{,}0}\right) 4{,}0\right] = 103{,}2 \text{ mt},$$

worin

$$A = \frac{4 \cdot 6{,}0\,(10 + 1) + 3 \cdot 9{,}0 \cdot 5{,}0}{15{,}0} = 26{,}6 \text{ t}.$$

8. Die Summen-Einflußlinie einer Stützenkraft. Wenn man für einen wandernden Lastenzug die Summen-Einflußgröße der Stützenkraft immer im Fußpunkte der *ersten* Last aufträgt, so erhält man eine Summen-Einflußlinie, die von jetzt ab *Stützenkraftlinie* genannt werden soll. Das Anwendungsgebiet dieser wichtigen Linie ist ein großes, was insofern auf der Hand liegt, als aus der Stützenkraft (wie unter 5 schon näher erläutert worden ist) sowohl *Querkräfte* als *Momente* herzuleiten sind.

Wenn es sich um die Stützenkraft A handelt, so trage man die gegebenen Lasten des Zuges, in der Reihenfolge wie sie nacheinander von der Stütze b bis a rollen, in beliebigem Maßstabe als eine Strecke ak der Stützensenkrechten in a auf. Jetzt zeichne man nacheinander die *Einflußlinie jeder Last für sich* und addiere ihre zusammengehörigen Einflußgrößen. Dadurch erhält man die gesuchte Summen-Einflußlinie für A.

Ein Blick in die Fig. 21 wird genügen, um zu erkennen, wie man sämtliche Einflußflächen der einzelnen Lasten erhält, wenn man von b

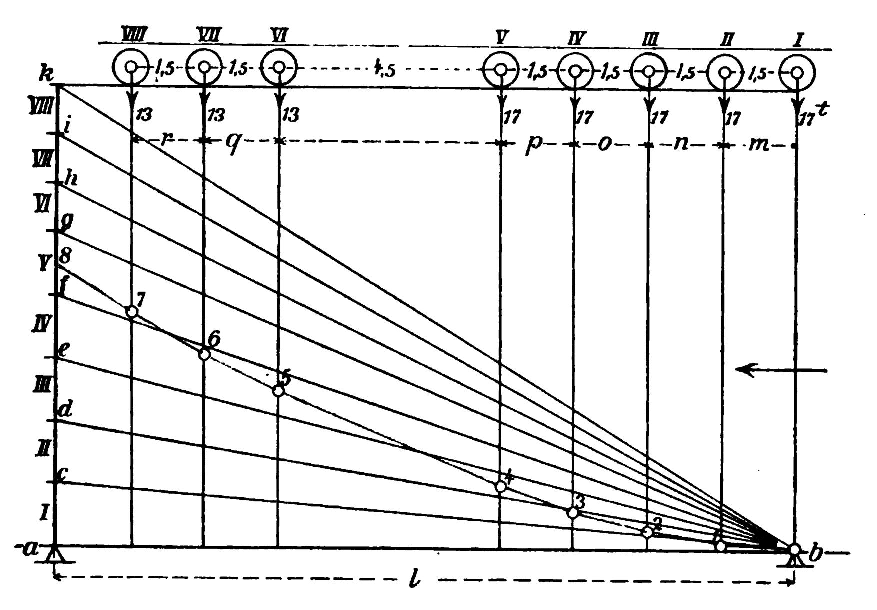


Fig. 21 (Punkt 1 liegt in der Linie bc).

aus Strahlen nach den Teilpunkten c bis k der Kraftlinie zieht. Denn das Dreieck abc ist die Einflußfläche der Stützenkraft A für eine wandernde Last I, und zwar für mittelbare oder unmittelbare Lastübertragung (5, a). Desgleichen ist irgend ein anderes, durch die Strahlen erhaltenes Dreieck die Einflußfläche der Stützenkraft A für die zugehörige wandernde Zuglast, z. B. ist das Dreieck bgh die Einflußfläche für die Last VI, usw. Daß dabei die Einflußflächen, mit Ausnahme der ersten (für I gezeichneten), nicht unmittelbar über der Trägerlinie ab liegen, ist ohne Belang, weil ihre Einflußgrößen η unverändert bleiben, an welcher Stelle der Kraftlinie auch die zugehörige Last liegt.

Das beschriebene Zusammenlegen aller Einflußflächen bietet ein bequemes Mittel, um zusammengehörige η zu addieren. Die Addition hat — wie bei den Erörterungen über Summen-Einflußlinien (**6**, a) näher dargelegt worden ist — immer an der voranschreitenden ersten Last (I) zu erfolgen, und zwar jedesmal dann, wenn eine der nachfolgenden Lasten (II bis VIII der Fig. 21) die *Ecke b*, die allen Einflußlinien gemeinsam ist, überschreitet. Um deshalb die Stellen, an denen zu summieren ist, zu kennzeichnen, empfiehlt es sich, den Lastenzug *in umgekehrter Fahrtrichtung* aufzutragen, so daß die *erste* Last senkrecht über *b* zu stehen kommt. Dann müssen die Eckpunkte der gesuchten Stützenkraftlinie in den durch die Abstände (*m* bis *r*) der Lasten gegebenen Ordinaten liegen.

Auf der Strecke *m* wird die Stützenkraft *A* nur von I beeinflußt. Die erste Seite *b*—1 der Stützenkraftlinie ist damit gefunden. Auf der Strecke *n* kommt der Einfluß der Last II hinzu. Deren Addition erfolgt durch Ziehen der Seite 1—2 *parallel zum Strahle bd*. Nun folgt die Strecke *o* mit dem Einfluß der Last III, usf., bis endlich die letzte Last (VIII) die Stütze *b* überschreitet und deren Einfluß durch die zu *bk* parallel gezogene Seite 7—8 eingetragen worden ist. Damit ist die Darstellung der Stützenkraftlinie für *A*, die in der Fig. 21 durch ihre rote Farbe hervortritt, beendet.

Man kann die Stützenkraftlinie auch auf anderem Wege entstehen lassen. Betrachtet man nämlich den Stützpunkt *b* als *Pol* der Kraftlinie (*ak*) und zeichnet mit Hilfe der Polstrahlen zwischen den Kraftrichtungen (I bis VIII) ein *Seileck*, so fällt dieses mit der Stützenkraftlinie zusammen. Das folgt ohne weiteres aus obigem Verfahren der Darstellung der Summen-Einflußlinie für *A*. In Worten ergibt sich daraus der Satz:

Die Stützenkraftlinie ist für mittelbare oder unmittelbare Lastübertragung ein Seileck, das mit Hilfe der im Stützpunkt aufgetragenen Kraftlinie und einer Polweite gleich der Stützweite zwischen den gegebenen Lastrichtungen gezeichnet wird.

Weil bei der Darstellung der Stützenkraftlinie einerseits die Summen-Einflußgröße immer *an der ersten Last* aufgetragen und anderseits die Einflußlinie einer Stützenkraft bei unmittelbarer oder mittelbarer Lastübertragung die gleiche wird, so ist für jede Lastlage die zugehörige Stützenkraft gleich der Ordinate der Stützenkraftlinie an der ersten Last. So ist z. B. in der Fig. 22, ganz gleich ob die gezeichneten Querträger vorhanden sind oder nicht, die Ordinate η_t der Stützenkraftlinie *bc* im beliebigen Schnitte *tt* für die gezeichnete Lastlage gleich der Stützen-

kraft A_t. Die größte Stützenkraft überhaupt ist immer gleich der Kraftstrecke ac.

9. Anwendung der Stützenkraftlinie für die Bestimmung von Querkräften.

a. Bei der Grundstellung der Lasten. Wir stellen die Erklärung der Grundstellung voran:

Je nachdem unmittelbare oder mittelbare Lastübertragung in Betracht kommt, liegt bei der Grundstellung des Lastenzuges die erste Last im betrachteten Querschnitte oder am ersten Querträger des betrachteten Feldes.

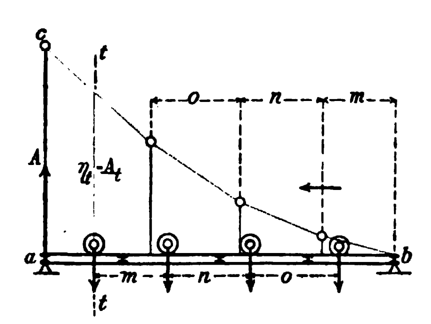


Fig. 22.

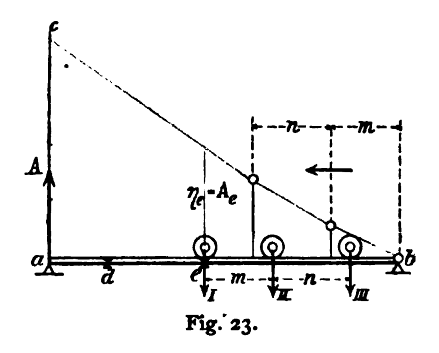


Fig. 23.

Sodann läßt sich nach vorigem hier ohne weiteres der Satz anschließen:

Für die Grundstellung ist die Querkraft im nicht belasteten Trägerteile gleich *der Stützenkraft.*

Es ist z. B. in Fig. 23, ganz gleich ob die gezeichneten Querträger d und e vorhanden sind oder nicht, die Querkraft in der Trägerstrecke ae überall gleich η_e oder gleich der Stützenkraft A_e für die Grundstellung.

In vielen Fällen ist die Grundstellung *die gefährlichste Lage eines Zuges für die Querkraft in einem bestimmten Schnitte oder Felde.* In Fällen, wo eine oder mehrere kleinere Lasten den größeren voraufgehen, ist sie im allgemeinen nicht die gefährlichste. Aber auch in diesen Fällen ist es leicht, die gefährlichste Zugstellung mit Hilfe der Stützenkraftlinie zu finden.

b. Beim Überschreiten der Grundstellung.

In den meisten praktischen Fällen handelt es sich hier um die Frage, ob *die größte Querkraft* in einem Schnitte tt (Fig. 22) oder einem Felde de (Fig. 23) bei der Grundstellung oder bei deren Überschreitung durch eine oder mehrere vordere Zuglasten eintritt. Deshalb empfiehlt es sich, zuerst die Querkraft Q_{I} bei der Grundstellung zu ermitteln und dann zu untersuchen, ob bei deren Überschreitung etwa Q_{II} oder Q_{III} usw.

größer werden, wobei die Zeiger I, II, III diejenige Last bezeichnen sollen, die im Schnitte *tt* (oder am *ersten* Querträger des betrachteten Feldes) liegt.

1. Bei *unmittelbarer* Übertragung ist z. B. (in Fig. 24) die Last II in den Schnitt *tt* gelegt. Bei dieser Stellung des Zuges ist die zugehörige Stützenkraft A_{II} *an der ersten Last* abzugreifen. Es ist

$$A_{II} = \overline{de}.$$

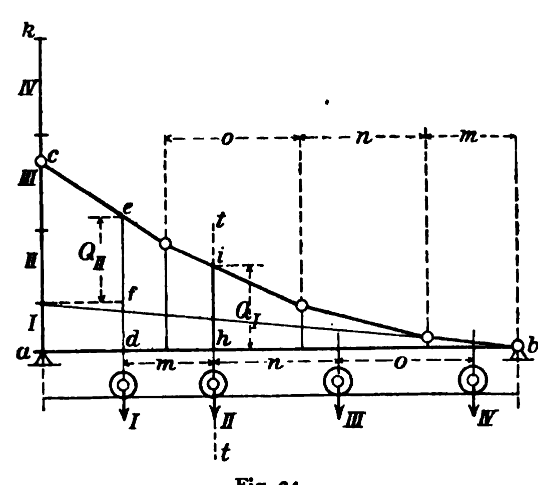


Fig. 24.

Die Querkraft Q_{II} für den Schnitt *tt* ist also mit

$$Q_{II} = A_{II} - I$$

anzuschreiben. Überträgt man die Strecke *df* der Last I graphisch auf die Ordinate *de* im Fußpunkte von I, so ergibt sich

$$Q_{II} = \overline{ef}.$$

Bei der Grundstellung dagegen liegt I im Schnitte *tt*. Dabei ist

$$Q_I = A_I = \overline{hi}.$$

Ist nun $\overline{hi} > \overline{ef}$ (was in der Fig. 24 z. B. der Fall ist), *so war die Grundstellung die gefährlichere* und Q_I ist die gesuchte größte Querkraft.

2. Bei *mittelbarer* Übertragung stellt man in das betreffende Feld, für welches die größte Querkraft gesucht wird, so viele von den vordern Lasten hinein, als möglich (Fig. 25). Für die Grundstellung erhält man mit Hilfe der Stützenkraftlinie *bc*

$$Q_I = A_I = \overline{eg}.$$

Jetzt zeichnet man zwischen die in das Feld *de* fallenden Lasten (I, II, III) *für die Feldweite de eine Querträger-Stützenkraftlinie ef*. Das geschieht in bekannter Weise mit Hilfe des Poles *e*, sowie der in *d* errichteten Kraftlinie *dl* und der Polstrahlen. Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst, denn die Differenz zwischen den zusammengehörigen Ordinaten der Linie *bc* und *ef* gibt die verschiedenen möglichen Werte der Querkraft

beim Überschreiten der Grundstellung. Von allen in Frage kommenden Werten Q_{I} bis Q_{IV} fällt $Q_{\mathrm{III}} = \overline{hi}$ bei der Messung am größten aus.

$$Q_{\mathrm{III}} = \overline{si} - \overline{sh} = \overline{hi}$$

ist danach die gesuchte größte Querkraft im Felde *de*. Dabei stellt die Strecke *sh* die Querträger-Stützenkraft D_{III} in *d* dar, bei der in Fig. 25 (unten) gezeichneten gefährlichsten Lastlage (mit III in *e*).

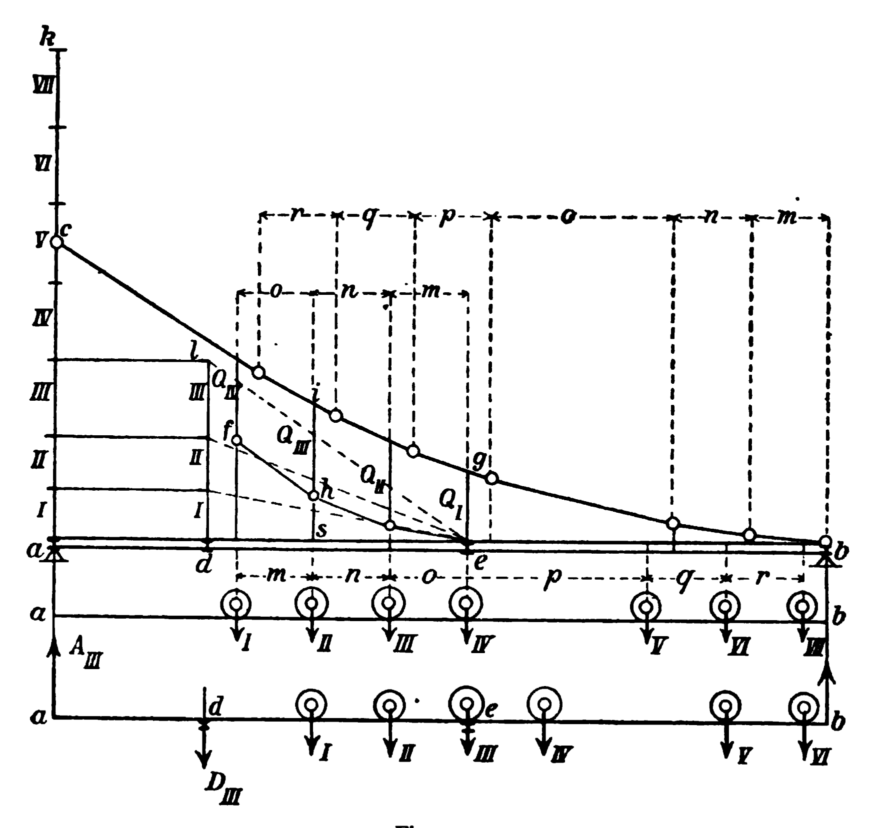


Fig. 25.

10. Hilfsmittel beim Berechnen einer Summen-Einflußgröße. Die Darstellung einer Summen-Einflußlinie, in welcher jede Summen-Einflußgröße abzugreifen ist (**6**), wird selten nötig. Nur die Stützenkraftlinie wird viel gebraucht, weil ihre Darstellung (wie gezeigt) wenig Mühe erfordert und weil sie in einfacher Weise vielseitige Anwendungen gestattet.

Beim gewöhnlichen Verfahren zum Berechnen von

$$\pm Z = \sum P\eta$$

überträgt man zuerst die Lastenabstände des gegebenen Zuges zweimal auf einen verschiebbaren Papierstreifen (Fig. 26), so daß man diesen bequem sowohl für die Links- als auch für die Rechtsfahrt des Zuges an die Trägerlinie legen kann. Die Summierung aller $P\eta$ erfolgt dann bei irgend einer Stellung des Zuges in einfacher Weise durch Abgreifen der η mit Hilfe des Zirkels, entsprechender Multiplikation

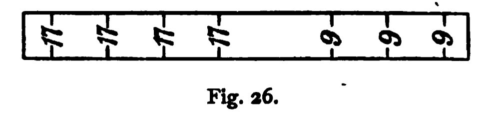


Fig. 26.

mit P und Addition der erhaltenen Produkte. Dabei gibt es in besondern Fällen — z. B. wenn einzelne Lasten von gleicher Größe sind, oder wenn solche Lasten unter einer und derselben Seite der Einflußlinie liegen, so daß ihr Gesamteinfluß durch ihre Mittelkraft und deren Einflußgröße ersetzt werden kann —, um die Addition zu erleichtern, noch kleine Kunstgriffe, auf die hier nicht näher eingegangen zu werden braucht.

Man zeichnet den Lastenzug auch wohl auf *durchsichtigem* Papier, damit man bei beliebiger Verschiebung des Zuges

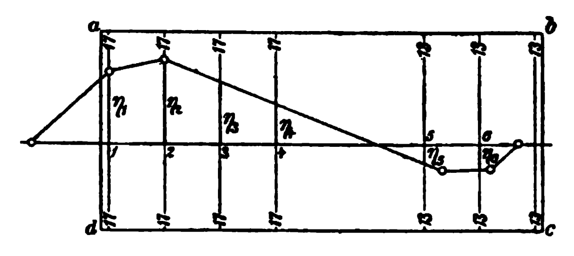


Fig. 27.

sowohl positive als negative Einflußgrößen bequem abgreifen kann (Fig. 27). Auf einem solchen verschiebbaren Streifen sind auch Reduktionsmaßstäbe bequem anzubringen, mit deren Hilfe die Multiplikationen der abgegriffenen η mit verschiedenen P sofort graphisch ausgeführt werden können.

Die Addition läßt sich auch *graphisch* durchführen, indem man $\sum P\eta$ als die Summe der statischen Momente aller in den Endpunkten der η und parallel zur Trägerlinie wirkenden Kräfte P auffaßt. Eine derartige Berechnung der Summen-Einflußgröße ist in der Fig. 28 ausgeführt.

Für die gezeichnete Lage des Zuges sind 1, 2, 3, 4 die Angriffspunkte der zugehörigen Kräfte I bis IV. Mit Hilfe der Kraftlinie ab und der beliebigen Polweite H ist zwischen den Kraftrichtungen 1—1'

bis 4—4' ein Seileck gezeichnet, dessen äußern Seiten auf der Trägerlinie eine Strecke *mn* abschneiden. Es ist danach

$$Z = \sum P\eta = H \cdot \overline{mn}.$$

Für $H = 1$ ist

$$Z = \overline{mn}.$$

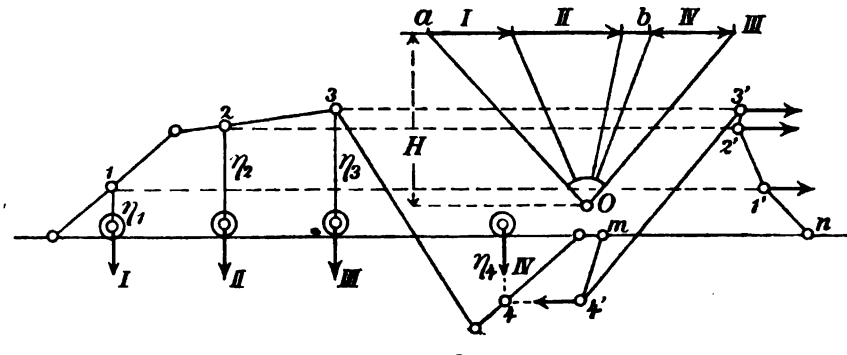


Fig. 28.

§ 2. Grenzwerte der äußern Kräfte einfacher Balkenträger.

Die äußern Kräfte einfacher Träger für ständige Belastungen sind unter I. **67** zu vergleichen.

11. **Momente bei unmittelbarer Belastung.** Die für die Berechnung der Momente notwendigen grundlegenden Sätze wurden bereits (unter I. **60, 61, 62**) gegeben. Außerdem ist (unter I. **67**) die Darstellung der äußern Kräfte ebener Träger für unmittelbare und mittelbare Belastung an Beispielen erläutert worden. An dieser Stelle handelt es sich noch um die Berechnung der Momente für *veränderliche* Belastung, und zwar für *gleichmäßig stetige* und für *Einzellasten.* Dabei sollen die Ergebnisse analytisch und graphisch hergeleitet werden.

a. Gleichmäßig stetige Last. Bei *gleichmäßig stetiger* Belastung tritt das größte Moment in der Mitte, und zwar bei *Voll*belastung des Trägers ein. Das geht ohne weiteres aus der Gestalt der Einflußfläche des Momentes hervor (**5**, c), die positiv ist und den größten Inhalt hat, wenn der fragliche Schnitt in der Trägermitte liegt.

Analytisch ist dies Ergebnis wie folgt herzuleiten. Das Moment M für einen beliebigen, in der Entfernung z von der Stütze a liegenden Schnitt ist mit

$$M = Az - \frac{pz^2}{2}$$

anzuschreiben, worin p die Last für die Einheit der Trägerlänge l sei, und also die Stützenkraft

$$A = \frac{pl}{2}$$

einzusetzen ist. Man erhält daraus für den gesuchten Grenzwert die Bedingung

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{p}{2}(l - 2z) = 0$$

oder

$$z = \frac{l}{2}.$$

Den Grenzwert selbst findet man, durch Einsetzen von $z = \frac{l}{2}$, mit

$$M = \frac{pl^2}{8}. \qquad (7)$$

Das ist der Ausdruck, der bereits im I. Bande (S. 161) aus der Gleichung der Parabel-Seillinie abgeleitet worden ist. *Die Darstellung der Momentenlinie ergibt eine Parabel*, deren Scheitel über der Trägermitte liegt. Ist die größte Höhe der Momentenfläche gleich η_c, so ist auch

$$M = H\eta_c,$$

wenn H den Polabstand des Kraftecks vorstellt, mit dessen Hilfe die Parabel-Seillinie gezeichnet ist. Daraus folgt

$$H = \frac{pl^2}{8\eta_c}.$$

Für $H = 1$ wird $M = \eta_c$. Das Moment ist also unmittelbar aus der Momentenfläche abzugreifen, wenn $H = 1$ gemacht wird (I. 67. a. 2).

b. Einzellasten.

1. Für einen unmittelbar wirkenden *Lastenzug* bestimmt man die Grenzwerte für alle Trägerschnitte am genauesten analytisch. Dabei wird zuerst die Frage zu beantworten sein, welche der Zuglasten (im Abstande z von der Stütze a) liegen muß, um dort den Grenzwert von M zu erzeugen. Das geschieht dadurch, daß man, der Reihe nach,

jede Last einmal in den Schnitt stellt und bei dieser Stellung des Lastenzuges für verschiedene Schnitte die Momente berechnet. Dann erhält man, bei ausreichender Zahl der gewählten Schnitte, eine Reihe von Momentengrößen, die genügt, um damit ebensoviel Momentenlinien aufzutragen, als Zuglasten vorhanden sind. Die größten Ordinaten dieser Linien stellen schließlich die gesuchten Grenzwerte vor. Eine

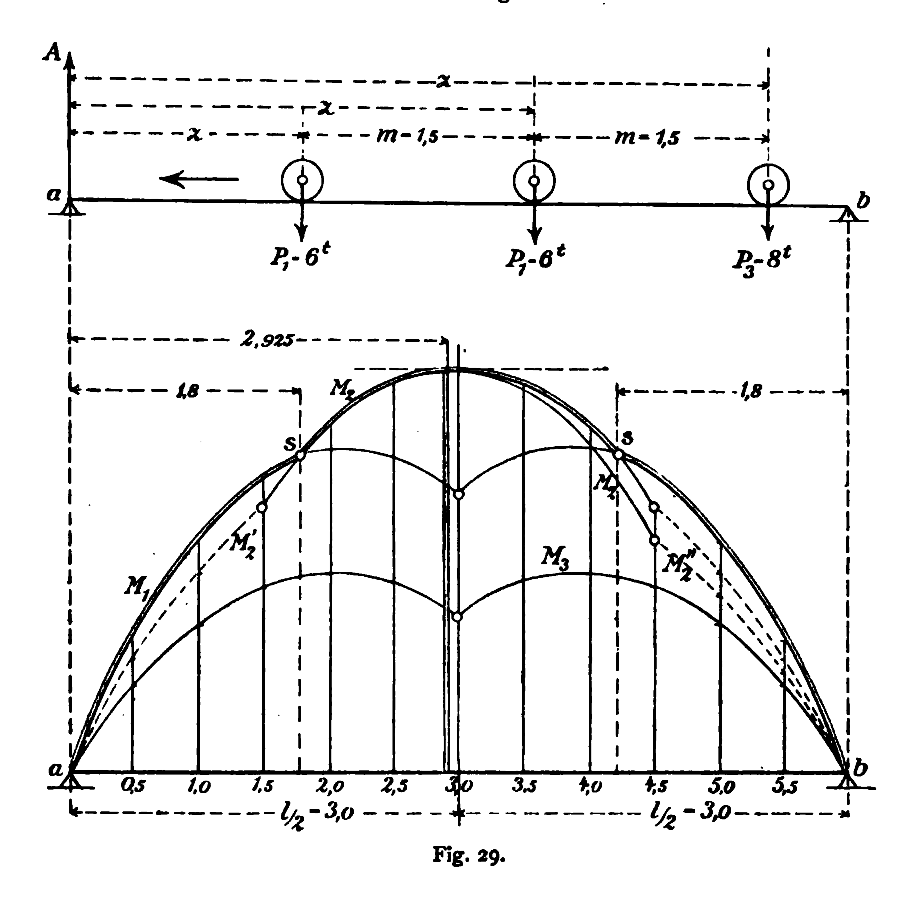


Fig. 29.

derartige Berechnung soll an einem Beispiele noch weiter erläutert werden.

Der Zug bestehe aus 3 Einzellasten, von denen die ersten beiden gleich groß sind. Die bei der *Links*fahrt in Frage kommenden drei Laststellungen sind in Fig. 29 dargestellt. Danach erhält man — unter Berücksichtigung der eingeschriebenen Bezeichnungen für einen beliebigen Schnitt im Abstande z von a — drei verschiedene Momenten-Gleichungen:

$$M_1 = A_1 \cdot z = \frac{[P_1(l - z + l - z - m) + P_3(l - z - 2m)]\,z}{l}$$

$$M_2 = A_2 \cdot z - P_1 \cdot m = \frac{[P_1(l - z + l - z + m) + P_3(l - z - m)]\,z}{l} - P_1 \cdot m$$

$$M_3 = A_3 \cdot z - P_1(m + 2m) = \frac{[P_1(l - z + m + 2m) + P_3(l - z)]\,z}{l}$$
$$- P_1(m + 2m).$$

Setzt man in diese drei Gleichungen die Zahlenwerte für l, m, P_1 und P_3 ein, so erhält man für die *Links*fahrt des Zuges:

1) $$M_1 = 14{,}5z - \frac{10}{3}z^2$$

2) $$M_2 = 19{,}5z - \frac{10}{3}z^2 - 9{,}0$$

3) $$M_3 = 18{,}5z - \frac{7}{3}z^2 - 27{,}0.$$

Daraus folgt für

$z =$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0 m
$M_1 =$	0	6,42	11,17	14,25	15,67	15,42	13,50	—	—	—	—	—	— mt
$M_2 =$	—	—	—	12,75	16,67	18,92	19,50	18,42	15,67	11,25	—	—	— mt
$M_3 =$	—	—	—	—	—	—	7,5	9,17	9,67	9,00	7,17	4,17	0 mt

Die aus der Tabelle entnommenen Werte sind in der Fig. 29 aufgetragen und damit zunächst die drei Momentenlinien für M_1, M_2 und M_3 insoweit erhalten worden, als diese für die *Links*fahrt gelten. Die Werte wurden sodann für die *Rechts*fahrt (wobei P_1 wieder vorangestellt wird) symmetrisch von einer Trägerhälfte auf die andere übertragen. Bei der Linie M_2 geschah das aber nur für die Ordinaten der linken Hälfte, weil diese *die größten* sind. Es zeigt sich dabei, daß die Linie M_3 für die Grenzwerte gar nicht in Betracht kommt: Einen Trägerschnitt, in welchem die Last 3 liegen muß, um dort das größte Moment zu erzeugen, gibt es also nicht.

Die gefundenen Grenzwerte sind danach aus dem *rot* gezeichneten Umriß der Momentenfläche abzugreifen. Die übrigen Teile der Momentenlinie M_1, M_2 und M_3 sind schwarz ausgezogen. Die punktiert dargestellten Momentenlinien veranschaulichen die Ergebnisse auf der Linksfahrt des Zuges, einerseits wenn dabei die erste Last P_1 die

Stütze a überschreitet und anderseits wenn die letzte Last P_3 die Stütze b noch nicht berührt hat. Bei dieser Fahrt befinden sich also immer nur zwei Lasten auf dem Träger und die zugehörigen beiden Momentengleichungen ergeben sich aus der obigen Gleichung für M_2, wenn darin einmal die erste und zum andern Mal die letzte Last verschwindet. Man erhält dann:

$$M_2' = A_2' \cdot z = \frac{[P_1(l-z) + P_3(l-z-m)]z}{l}$$

und

$$M_2'' = A_2'' \cdot z - P_1 \cdot m = \frac{P_1(l-z+l-z+m)z}{l} - P_1 \cdot m.$$

Das gibt in Zahlenwerten:

$$4) \qquad M_2' = 12z - \frac{7}{3}z^2$$

$$5) \qquad M_2'' = 13{,}5z - 2z^2 - 9{,}0.$$

Danach sind die punktierten Linien der Fig. 29 aufgetragen worden.

Wie man sieht, schneiden sich die Momentenlinien M_1 und M_2 im Punkte s. Eine Nachprüfung der richtigen Lage von s empfiehlt sich. Zu dem Zwecke setze man die Momentengleichungen 1 und 2 einander gleich und bestimme daraus die Abszisse z des Schnittpunktes.

Man erhält

$$z = 1{,}8 \text{ m}.$$

12. Der größte Momenten-Grenzwert.

a. Analytische Bestimmung. Aus dem vorigen Beispiel ist zu sehen, wie man den größten aller Grenzwerte (und seine Lage) aus der gezeichneten Momentenfläche entnehmen kann. Zuweilen handelt es sich aber darum, für einen gegebenen Lastenzug diesen größten aller Werte unmittelbar aufzufinden, ohne erst die Momenten-Gleichungen dazu aufstellen zu müssen. Das geschieht wohl am einfachsten *graphisch*, wie weiterhin gezeigt werden soll.

1. Vorerst möchte diese Frage *analytisch* für das vorige Beispiel gelöst werden. Dort ist die mittlere Last P_1 diejenige, die bei ihrer Lage im gefährlichsten Trägerschnitte das überhaupt größte Moment erzeugt. Es fragt sich nun, wo der gefährlichste Schnitt liegt. Das erfahren wir durch Differentiation der Gleichung für M_2 nach z.

Es ist

$$\frac{\partial M_2}{dz} = 19{,}5 - \frac{20}{3}z = 0.$$

Daraus erhält man für die Abszisse des gefährlichsten Schnittes

$$z = 2{,}925 \text{ m}.$$

Das größte aller Momente, dessen Ordinate in Fig. 29 *rot* dargestellt ist, berechnet sich (aus 2) mit

$$\max. M = 19{,}5[illegible] \text{ mt}.$$

Diese *Nachprüfung* der Darstellung in Fig. 29 war notwendig, weil sonst ein *genauer* Umriß der Momentenlinie M_2 in der Nähe der Trägermitte schwierig zu zeichnen gewesen wäre.

2. Allgemein läßt sich folgender Satz beweisen:

Der gefährlichste Trägerschnitt und die Mittelkraft aller Lasten des Zuges liegen gleich weit von der Trägermitte.

Der Beweis ist am einfachsten analytisch zu führen. Es bezeichne

R die Mittelkraft aller Zuglasten.
R_1 - - der links vom Schnitte liegenden Lasten
R_2 - - - rechts - - - -

Dann ist das statische Moment für den fraglichen Schnitt, der im Abstande c, c_1 und c_2 von den bezeichneten Mittelkräften liege, mit

$$M = Az - R_1 c_1$$

anzuschreiben (Fig. 30).

Fig. 30.

Die Stützenkraft A bestimmen wir aus der Mittelkraft R mit

$$A = \frac{R(l - z - c)}{l}.$$

Also

$$M = \frac{R}{l}(lz - z^2 - cz) - R_1 c_1.$$

Dann gibt

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{R}{l}(l - 2z - c) = 0$$

die Abszisse des gefährlichsten Schnittes, nämlich

$$z = \frac{l - c}{2}, \tag{8}$$

womit der vorangestellte Satz bewiesen ist.

Setzt man diesen Wert von z in die Momentengleichung ein, so erhält man den größten aller Grenzwerte:

$$\text{max. } M = R\frac{z^2}{l} - R_1 c_1. \tag{9}$$

In einem besonderen Falle ist zuerst diejenige Last zu suchen, die am fraglichen Schnitte liegen muß. Weil der Schnitt in praktischen Fällen immer sehr in die Nähe der Trägermitte fällt, so ist das in der Regel *diejenige Last, die der Mittelkraft R am nächsten liegt.*

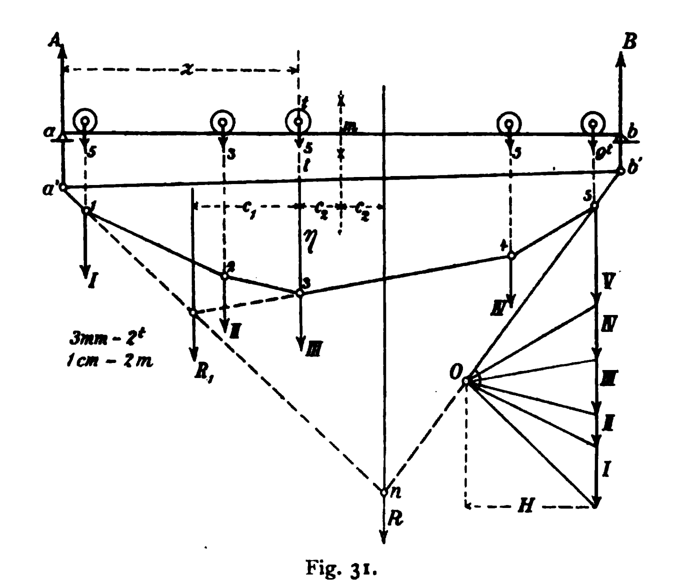


Fig. 31.

b. Graphische Bestimmung. Für den in der Fig. 31 dargestellten Lastenzug und für einen Träger ab von 15 m Stützweite soll der gefährlichste Querschnitt und das dort auftretende größte aller Momente *graphisch* ermittelt werden.

Der Gang der Lösung ist in Fig. 31 zu verfolgen: Zwischen den gegebenen Kraftrichtungen und mit Hilfe eines Kraftecks bei O ist ein Seileck gezeichnet, dessen äußere Seiten sich im Punkte n schneiden. Durch n verläuft also die Mittelkraft R aller Lasten (I bis V). Ihr zunächst liegt die Last III, weshalb angenommen worden ist, daß diese im gefährlichen Schnitt tt liegen muß. Deshalb wurde der Abstand zwischen R und III *halbiert*, und nach vorigem trifft die Halbierungslinie die Mitte m des Trägers. Damit waren die Stützpunkte a und b

gegeben und infolgedessen ließ sich die *Schlußlinie* $a'b'$ der Momentenfläche zeichnen. Es ist schließlich

$$\max. M = H\eta.$$

Die Kraftlinie ist für 1 t = 1,5 mm gezeichnet. Danach wurde H (mit 17,5 mm) zu 11,67 t bestimmt. Die Stützweite ab ist im Maßstabe 1 : 200 dargestellt. Es gelten also 7,5 cm = 15,0 m oder 1 cm = 2,0 m. η beträgt in der Darstellung 1,5 cm, bedeutet demnach 3,0 m. Daraus folgt

$$\max. M = 11{,}67\ \text{t} \cdot 3{,}0\ \text{m} = 35\ \text{mt}.$$

Um den erhaltenen Wert nachzuprüfen, ist die Gleichung (9) benutzt worden. Dazu war es nötig, durch Verlängern der an I und III stoßenden Seileckseiten den Abstand c_1 der Mittelkraft R_1 festzulegen. Durch Abgreifen in der Fig. 31 ergab sich dann:

$$\max. M = R\frac{z^2}{l} - R_1 c_1 = \frac{27 \cdot 6{,}33^2}{15{,}0} - 13 \cdot 2{,}85$$

oder

$$\max. M = 35\ \text{mt}.$$

Ob man hierbei die im Schnitte tt liegende Last III mit zur linken oder rechten Trägerstrecke rechnet, ist gleich.

13. Momente bei mittelbarer Belastung. Für *gleichmäßig stetige* Lasten treten die Grenzwerte bei *Voll*belastung ein. Ihre Darstellung erfolgt also genau so, wie es bereits im I. Bande (**67**, b) für ständige Lasten ausführlich dargelegt worden ist. Danach bildet *die Momentenlinie ein Vieleck, dessen Ecken in derjenigen Parabel liegen, die für unmittelbare Belastung gezeichnet wird.*

Für *Einzellasten* ermittelt man zuerst die größten Momente an den Querträgerpunkten für unmittelbare Übertragung und danach erst bestimmt man den Verlauf der Momentenlinie innerhalb der einzelnen Felder.

a. An den Querträgerpunkten. Zuerst ist hier für jeden Querträger die gefährlichste Lastlage zu bestimmen, was — um dabei unnützes Probieren zu vermeiden — nach der (unter **7**, a) gegebenen ausführlichen Anleitung zu geschehen hat. Die zugehörigen Momente können dann (in bekannter Weise) entweder analytisch (**11**, b) oder graphisch dargestellt werden. Beim graphischen Verfahren zeichnet man zweckmäßig das Seileck nur einmal und legt die verschiedenen Schlußlinien durch entsprechendes *Verschieben der Trägerlinie* fest. Dies Verfahren ist als Beispiel in der Fig. 32 durchgeführt.

Auf einem 15 m weit frei gestützten Träger *ab* rollt ein Zug in der gezeichneten Stellung. Es sind vier Querträgerfelder vorhanden mit den Weiten von 4, 5, 3,5 und 2,5 m. Die Kraftlinie *ac* ist unter der

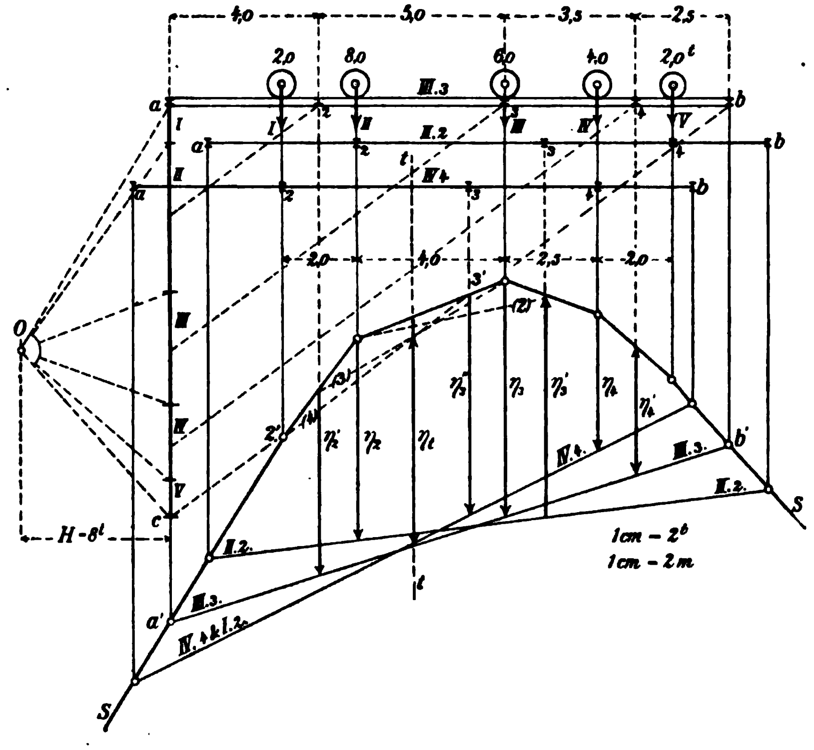


Fig. 32.

Stütze *a* angetragen und in bekannter Weise benutzt worden, um die gefährlichsten Lastlagen zu ermitteln. Danach muß liegen:

Last II über dem Querträger 2
- III - - - 3
- IV - - - 4.

Der Lastenzug ist auf der Trägerlinie *ab* gleich anfangs so gestellt, daß III in 3 zu liegen kommt. Für diese Lastlage ist mit Hilfe des Kraftecks *Oac* das Seileck *SS* mit der Schlußlinie *a'b'* gezeichnet. Die Schlußlinie hat die besondere Bezeichnung III.3 erhalten, um dadurch anzudeuten, daß sie nur für die Lage von III in 3 gilt. In der zugehörigen Momentenfläche wurde die Ordinate η_3 markiert, die dem größten Momente in 3 entspricht.

Jetzt wurde die Trägerlinie *ab* so weit verschoben, daß die Last II in 2 zu liegen kam, darauf die Schlußlinie II.2 und η_2 festgelegt. Schließlich wurde die Trägerlinie nochmals verschoben, um die Last IV in 4 zu legen. Das gab die Schlußlinie IV.4 und die Ordinate η_4.

Damit waren die größten Momente für jeden Querträgerpunkt gefunden. Es fand sich *durch Abgreifen in Fig.* 32:

$$M_2 = H \cdot \eta_2 = 8 \cdot 5{,}45 = 43{,}6 \text{ mt}$$
$$M_3 = H \cdot \eta_3 = 8 \cdot 6{,}28 = 50{,}2 \text{ -}$$
$$M_4 = H \cdot \eta_4 = 8 \cdot 3{,}58 = 28{,}6 \text{ -}$$

Die Nachprüfung dieser Werte *durch die Rechnung* ergab das Folgende:

$$M_3 = A_3 \cdot 9{,}0 - (8{,}0 \cdot 4{,}0 + 2{,}0 \cdot 6{,}0) = 50{,}2 \text{ mt}.$$

Darin war

$$A_3 = \frac{2 \cdot 1{,}5 + 4 \cdot 3{,}5 + 6 \cdot 6{,}0 + 8 \cdot 10{,}0 + 2 \cdot 12{,}0}{15} = \frac{157}{15} \text{ t}.$$

Ferner:

$$M_2 = A_2 \cdot 4{,}0 - (2{,}0 \cdot 2{,}0) = 43{,}7 \text{ mt}$$

mit

$$A_2 = \frac{2 \cdot 2{,}5 + 4 \cdot 4{,}5 + 6 \cdot 7{,}0 + 8 \cdot 11{,}0 + 2 \cdot 13{,}0}{15} = \frac{179}{15} \text{ t}.$$

$$M_4 = A_4 \cdot 12{,}5 - (6 \cdot 2{,}5 + 8 \cdot 6{,}5 + 2 \cdot 8{,}5) = 28{,}5 \text{ mt}$$

mit

$$A_4 = \frac{2 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 2{,}5 + 6 \cdot 5{,}0 + 8 \cdot 9{,}0 + 2 \cdot 11{,}0}{15} = \frac{135}{15} \text{ t}.$$

b. **Für Schnitte zwischen den Querträgern.** Um die Bestimmung vorzubereiten, wurden aus den Momentenflächen der Fig. 32 außer den Ordinaten η_2, η_3, η_4 auch noch alle diejenigen Ordinaten abgegriffen, die links und rechts von jenen an den *Nachbar*querträgern auftreten. So wurde erhalten:

η_2'	für Querträger	2	aus der Momentenfläche	III.3
η_3'	-	3	-	II.3
η_3''	-	3	-	IV.4
η_4'	-	4	-	III.3.

Die danach erhaltenen Momente sind in der Fig. 33 besonders aufgetragen und bezeichnet worden. Aus der Betrachtung der Figur ergeben sich die folgenden allgemeinen Sätze.

Die Momentenlinie ist in beiden Endfeldern des Trägers eine Gerade. Denn für jeden Schnitt in diesen Feldern ist die Einflußlinie des Momentes (5, c) ein Dreieck, dessen Spitze in der betreffenden Querträger-

Senkrechten (2 und 4) liegt, so daß die Momente verschiedener Schnitte der zugehörigen Dreieckshöhe einfach proportional sind.

Zwischen den Querträgern ist die Momentenlinie ein Vieleck, in welchem jede Seite einer besondern gefährlichsten Lastlage entspricht. Wie man eine solche Lastlage findet, ist (unter **7**, b) ausführlich dargelegt. Hat man alle in Frage kommenden Lagen — in denen immer eine Last an einem Querträger des betrachteten Feldes liegen muß — ermittelt, so zeichnet man dafür die Momentenfläche (wie in Fig. 32) und kann dann daraus alle Ordinaten η entnehmen, die zur genauen Darstellung der ganzen Momentenlinie erforderlich sind.

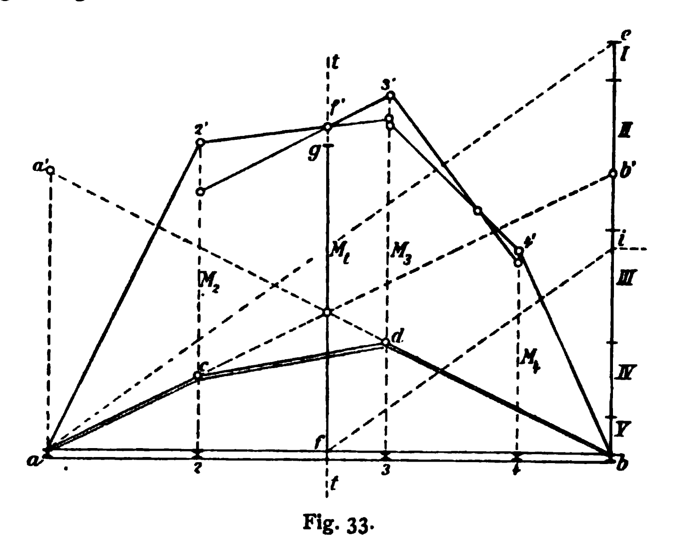


Fig. 33.

Im besondern ist über die Führung der Momentenlinie zwischen den Querträgern (in Fig. 33) noch folgendes zu sagen. Im Felde 2—3 schneiden sich die beiden aus den Momentenflächen III.3 und II.2 (der Fig. 32) entnommenen Geraden im Schnitte *tt*. Es fragt sich nun, ob außer den beiden genannten Momentenflächen noch eine (oder auch mehrere) andere gezeichnet werden können, die für den Schnitt *tt* des Feldes 2—3 ein größeres Moment liefern, als das dafür mit Hilfe der Schlußlinien III.3 und II.2 bisher berechnete. Um diese Frage zu entscheiden, empfiehlt es sich, aus einer Einflußlinie für den Schnitt *tt* einen Anhalt dafür zu gewinnen, ob es etwa noch eine bisher nicht betrachtete gefährlichste Lastlage gäbe, die eine derartige neue Momentenfläche hervorrufen könnte. Im vorliegenden Falle ist das näher untersucht worden.

Die Einflußlinie des Momentes für *tt* ist in bekannter Weise (nach **5**, c) gezeichnet. Es ist das rot geränderte Viereck *acdb*. Für die Feststellung der gefährlichsten Lastlage in der Einflußfläche gilt die (unter **7**, b) gegebene Regel. Man sieht aus der betreffenden Teilung der Kraftlinie *be* im Punkte *i*, daß aller Wahrscheinlichkeit nach, um den Grenzwert von M_t zu erzielen, entweder die Last II in 2 oder III in 3 gelegt werden muß. Danach gibt es keine neue Momentenfläche, die für M_t einen Wert lieferte, der größer als der bisher gefundene wäre.

Man könnte zwar versuchen — wie in Fig. 32 dargestellt — den Zug ganz nach rechts zu schieben, damit die schweren Lasten von 8 und 6 t möglichst unter großen Ordinaten der Einflußfläche zu liegen kämen. Dann läge die Last I in 2 oder, was dasselbe ist, die Last IV in 4. Man findet nun aus der Momentenfläche IV.4 der Fig. 32, wenn man zuerst im betrachteten Felde 2—3 zwischen den Seileckpunkten 2′ und 3′ *eine Gerade* (4) zieht — weil für eine bestimmte Lastlage die Momentenlinie zwischen zwei Querträgern immer eine Gerade ist —, daß η_t (im Schnitte *tt* gemessen) *kleiner* wird als jede der im gleichen Schnitte des Feldes 2—3 gemessenen beiden Ordinaten der Momentenflächen III.3 und II.2. Das in der Fig. 33 durch die Strecke *ff*′ dargestellte Moment M_t ist also größer als die Strecke

$$fg = H \cdot \eta_t.$$

Übrigens ist in der Fig. 32 für die beiden Lastlagen III in 3 und II in 2 jedesmal auch in dem Felde 2—3 die Momentenlinie *gerade* eingezeichnet. Das gibt die entsprechenden mit (3) und (2) bezeichneten punktierten Geraden. Für jede dieser beiden Geraden muß sich natürlich *dasselbe* M_t ergeben.

14. Die Querkräfte. Die (unter **5**, b) dargestellten Einflußlinien begrenzen stets Flächen verschiedenen Vorzeichens. Es gibt deshalb für jede Belastung (in einem Schnitte oder einem Felde) *zwei Grenzwerte der Querkraft, einen positiven und einen negativen.*

a. Für Einzellasten. Ein Grenzwert kann nur dann eintreten, wenn eine der Lasten an einer ausspringenden Ecke der Einflußfläche liegt (**6**, a). Bei *unmittelbarer* Übertragung muß also eine Last im betrachteten Schnitte liegen, bei *mittelbarer* dagegen, je nachdem der positive oder negative Wert in Frage steht, an dem *ersten* Querträger des betrachteten Feldes.

Das Feststellen der gefährlichsten Lastlage geschieht am einfachsten mit Hilfe der *Stützenkraftlinie*, wie es (unter **8**) ausführlich gezeigt wurde.

Ist A die zur gefährlichsten Lage gehörende Stützenkraft, R die Mittelkraft der die *Grundstellung* (am *ersten* Querträger des Feldes) überschreitenden Lasten, so ist anzuschreiben

bei *unmittelbarer* Übertragung: $\max. + Q = A - R$,

- *mittelbarer* - : $\max. + Q = A - R\frac{e}{a}$.

Darin bedeutet a die Feldweite und e den Abstand zwischen R und dem rechtsseitigen Querträger des Feldes.

$\max. - Q$ findet sich ohne weiteres, wenn man A mit B und den *zweiten* Querträger des Feldes mit dem ersten vertauscht.

Die *graphische* Darstellung der Grenzwerte ist (unter **8**) so ausführlich beschrieben, daß es genügen wird, auf die dortigen Beispiele hinzuweisen.

b. Für gleichmäßig stetige Lasten. Die hier zu beantwortenden Fragen ergeben sich am einfachsten aus der Betrachtung der Einflußflächen (**5**) in Verbindung mit der Stützenkraftlinie.

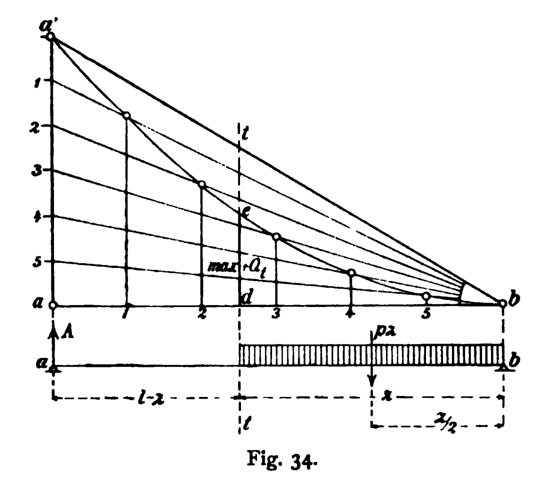


Fig. 34.

1. *Unmittelbare Übertragung.* Denkt man sich eine unendlich kleine Strecke dz der Last als Einzellast von einer Stütze zur andern wandern und zeichnet dafür die Summen-Einflußlinie der Stützenkraft, so nimmt diese — wie aus Fig. 34 zu ersehen ist — die Gestalt *einer Parabel* an.

Analytisch hat man für einen Schnitt tt (Fig. 34)

$$\max. + Q = A = + \frac{pz^2}{2l}$$
$$\max. - Q = B = - \frac{p(l-z)^2}{2l}, \qquad (10)$$

wenn p die Last für die Einheit der Trägerlänge bedeutet.

Aus den Parabelgleichungen ergeben sich die größten Werte von $\max. \pm Q$, für $z = l$ und $z = 0$, mit $\pm \frac{pl}{2}$. Daraus folgt für die

sämtlichen max. $+Q$ die in der Fig. 34 angegebene bekannte Parabeldarstellung, wobei auf der Stützensenkrechten die Strecke aa' (in beliebigem Maßstabe) gleich $+\frac{pl}{2}$ gemacht ist. Im Schnitte tt ist danach

$$\max. + Q_t = \overline{de}.$$

Für max. $-Q$ ergibt sich die gleiche Darstellung mit Hilfe einer in der Stützensenkrechten b negativ aufzutragenden Strecke gleich $\frac{pl}{2}$.

2. *Bei mittelbarer Übertragung.* Es handle sich zunächst um die analytische Bestimmung von max. $+Q$ für das beliebige Trägerfeld de der Weite a (Fig. 35). Wie auch der Schnitt im Felde gelegt werden möge, immer erhält man für Q denselben Wert:

$$\max. + Q = A - D,$$

wenn D die von der *innerhalb* des Feldes liegenden Teillast herrührende Querträger-Stützenkraft bei d ist, wobei die Last *bis zur Lastscheide* n vorzurücken hat. Die Lage der Lastscheide ist mit Hilfe der Einflußlinie $a'd'e'b'$ festgelegt.

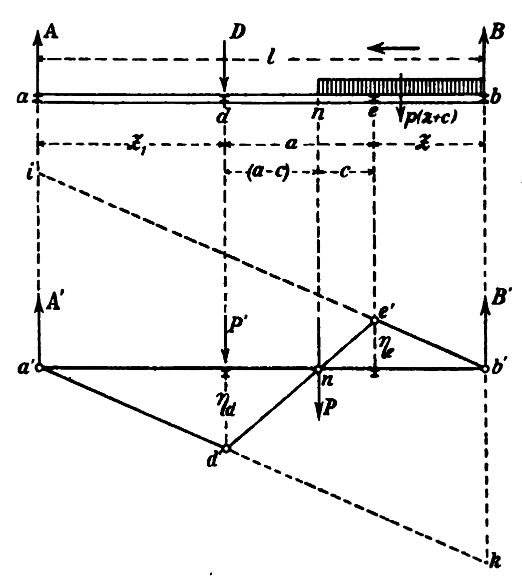


Fig. 35.

Aus der Einflußfläche findet man (mit Bezug auf die Bezeichnungen der Fig. 35)

$$\max. + Q = \frac{p(z+c)\eta_e}{2}.$$

Weil die Strecke $d'i$ gleich der *Lasteneinheit* gemacht wurde (**5**, b), so ist

$$\frac{\eta_e}{1} = \frac{z}{l}.$$

Das eingesetzt gibt

$$\max. + Q = \frac{+p(z+c)z}{2l}.$$

Darin bleibt c analytisch zu ermitteln: Q wird gleich Null, sobald die wandernde Einzellast P in der Lastscheide n angelangt ist. Daraus gewinnt man die Bedingung

$$Q = A' - P' = 0,$$

wenn A' und P' der Reihe nach die Stützenkräfte in a und im Querträger d bedeuten, hervorgerufen durch P in n. Man erhält demnach

$$\frac{P(z+c)}{l} - P\frac{c}{a} = 0$$

oder

$$c = \frac{az}{(l-a)}.$$

Dies in obige Gleichung für $Q_{max.}$ eingesetzt gibt nach kleinen Umformungen

$$\max. + Q = \frac{+pz^2}{2(l-a)}. \qquad (11)$$

Bei gleicher Behandlung erhält man aus der Gestalt der negativen Einflußfläche

$$\max. - Q = \frac{-pz_1^2}{2(l-a)}. \qquad (12)$$

z und z_1 sind nacheinander die Abstände zwischen dem *ersten* Querträger des Feldes (in der Fahrrichtung) und der nächstliegenden Stütze.

Die beiden letzten Gleichungen für max. $\pm Q$ bieten ein Mittel zu einer einfachen *graphischen Darstellung* aller Grenzwerte. Setzt man nämlich

$$z_1 = l - a - z,$$

so gehen die Gleichungen über in

$$\left.\begin{aligned} \max. + Q &= \frac{+pz^2}{2(l-a)} \\ \max. - Q &= \frac{-p(l-a-z)^2}{2(l-a)}, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

d. h. sie stimmen *für* $l = (l-a)$ mit den für *unmittelbare* Lastübertragung abgeleiteten Gleichungen überein. Daraus folgt der Satz:

Bei mittelbarer Lastübertragung sind in einem Felde der Weite a die Grenzwerte der Querkraft ebenso groß wie bei einem unmittelbar belasteten Träger der Stützweite $(l-a)$ *und für einen im Abstande z und* $(l-a-z)$ *von den Stützen liegenden Schnitt* (Fig. 36).

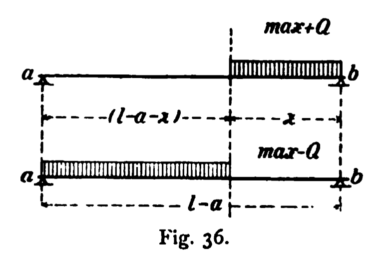


Fig. 36.

Die danach zu bewirkende graphische Darstellung der Grenzwerte (Fig. 37) ist bequem, so lange die Trägerfeldweiten überall *gleich groß* sind. Ist das nicht der Fall, so kann man graphisch in verschiedener

Weise vorgehen, wie dies in der Fig. 38 ausgeführt worden ist. Dabei sind zwei Verfahren zu unterscheiden, je nachdem man die Lastscheide benutzt oder nicht.

Will man die Lastscheide nicht benutzen, so zeichnet man zwei Stützenkraftlinien, eine für den Hauptträger der Stützweite l und eine zweite für das betrachtete Querträgerfeld der Werte a. Beide Linien sind Parabeln, die in bekannter Weise mit Hilfe der Stützensenkrechten

$$\overline{a a'} = \frac{pl}{2}$$

und

$$\overline{d d'} = \frac{pa}{2}$$

aufgetragen werden.

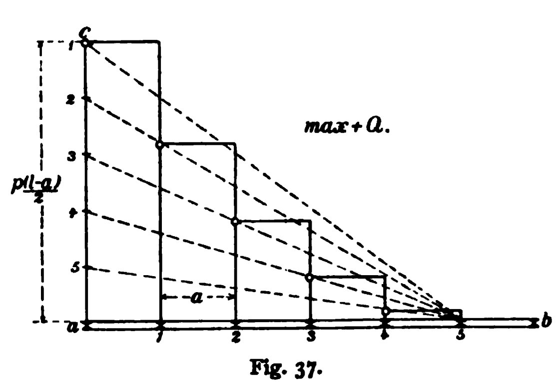


Fig. 37.

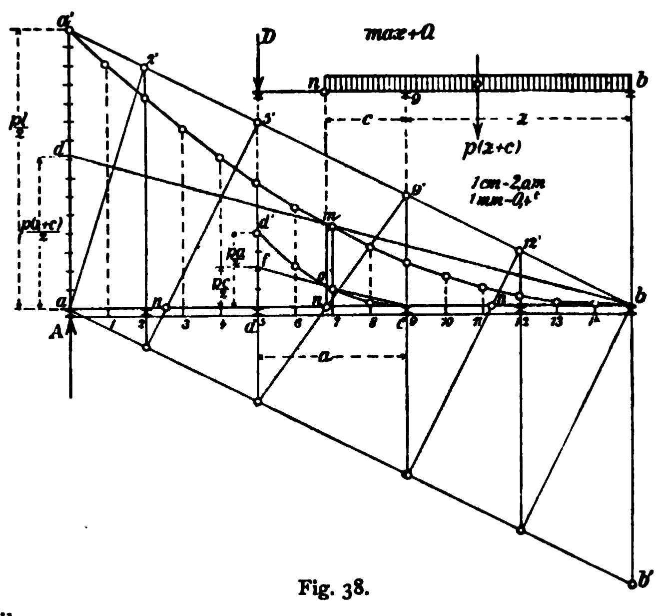


Fig. 38.

Weil

$$\max. + Q = A - D$$

ist, so braucht man im Felde de nur diejenige Stelle zu suchen, für welche die Differenz der Ordinaten beider Parabeln am größten wird.

Die Ordinaten verlaufen dort selbstverständlich durch die Lastscheide. Danach ist im Falle der Fig. 38

$$\max. + Q = \overline{mo}.$$

Einfacher möchte das zweite Verfahren sein, weil dabei *nur gerade Linien* zu ziehen sind. Es ist in Fig. 38 für das vorbetrachtete Feld *de* nochmals durchgeführt, wobei die beiden dazu nötigen Hilfslinien, ebenso wie die Ordinate *mo*, mit roter Farbe ausgezeichnet wurden.

Die beiden Geraden *bd* und *ef* sind Einflußlinien für die Stützenkräfte A und D und damit man sowohl A als auch D unmittelbar auf der durch die Lastscheide verlaufenden Ordinate abgreifen kann (nicht wie sonst im Lastpunkte), so ist anstatt der *ganzen* hier in Frage kommenden Lasten jedesmal nur deren *Hälfte* auf den betreffenden Stützensenkrechten (in *a* und *d*) aufgetragen worden.

Demnach wurde gemacht

$$\overline{ad} = \frac{p(z+c)}{2}$$

$$\overline{df} = \frac{pc}{2}.$$

Die Differenz der Ordinaten beider Einflußlinien mußte natürlich in der Lastscheide ebenfalls die Strecke *mo* ergeben.

Für $p = 2$ t/m und $l = 15$ m ist $\frac{pl}{2} = 15$ t. Die zugehörige Strecke aa' ist gleich 37,5 mm gezeichnet, das gibt

$$1 \text{ mm} = \frac{15}{37{,}5} = 0{,}4 \text{ t}.$$

Da nun $\overline{om}$ mit rund 8,3 mm aus der Fig. 38 abzugreifen ist, so ist für diesen Fall

$$\max. + Q = 8{,}3 \cdot 0{,}4 = 3{,}3 \text{ t}.$$

Rechnerisch ergibt sich nach Gl. (11) ebenfalls

$$\max. + Q = \frac{pz^2}{2(l-a)} = \frac{2 \cdot 6{,}0^2}{2(15-4)} = \text{rund } 3{,}3 \text{ t}.$$

15. Grenzwerte in besondern Belastungsfällen. Im vorigen ist vorausgesetzt worden, daß bei mittelbarer Belastung immer *ein Querträger über jeder Stütze* liegt. Das ist aber in manchen praktischen Fällen nicht so und dann ändert sich bei gewissen Laststellungen sowohl die Gestalt der Einflußlinien, als auch der Momenten- und Querkraftlinien. In welcher Weise das geschieht, soll an einem *Beispiel* erläutert werden.

In Fig. 39 ist im Längsschnitt eine Eisenbahnbrücke dargestellt, in welcher die Lasten auf die Stützpunkte der Hauptträger *Ht* derart übertragen werden, wie dies im ersten Bande (I. **10**, S. 19, Fig. 12) ausführlich erläutert worden ist. Das Gleis wird von Holzquerschwellen unterstützt, von denen 10 Stück (2 bis 11) über den Längsträger *Lt* liegen, die über den Endquerträgern *ausleger*artig vorstehen und derart auf den Querträgern (*a*, *b*, *c*) lagern, daß sie als einfache, statisch bestimmte Balkenträger berechnet werden können. Das Gleis wird von einer Lokomotive befahren, deren Achsstände und Radlasten in der Fig. 39—40 angegeben sind.

Es werden folgende Fragen gestellt:

a) *Wie groß ist das größte Moment eines der Längsträger und wo liegt es?*

b) *Bei welcher Laststellung erfährt der mittlere Querträger bei c den größten Druck und wie groß ist dieser?*

a. Momente. Über den Stützpunkten eines Längsträgers liegt keine Querschwelle und die letzte Querschwelle liegt auf dem *Ausleger*ende. Beides ist wohl zu beachten, namentlich aber daß jede Last, die zwischen die beiden letzten, links und rechts vom Stützpunkte liegenden Schwellen (10 und 11) fällt, zu jedem Momente für einen Schnitt *innerhalb* der Stützen einen *negativen* Beitrag liefert.

Man darf annehmen, daß die auf den Schienen rollenden Lasten in der *Mitte* der Querschwellen auf die Längsträger übertragen werden. Nach **13**b wird unter einer der Trägermitte zunächst liegenden Schwelle das größte Moment eintreten. Es bestehen demnach nur zwei Möglichkeiten: Entweder liegt eine Last im Punkte 8 oder 9. Beide Fälle sind in der Fig. 39 untersucht worden. Dabei ergab sich η_8 als größte Ordinate der beiden Momentenflächen. D. h. also die gefährlichste Zugstellung tritt ein, wenn eine der Lasten über der Schwelle 8 steht.

Die Darstellung der Momente ist in bekannter Weise erfolgt. Mit Hilfe des Kraftecks bei *O* wurden zuerst die Seilecke *ohne Rücksicht auf die besondere Lage der lastübertragenden Querschwellen* gezeichnet. Dann wurden in denjenigen Schwellenmitten, *zwischen die* eine Last fällt, die Senkrechten gezogen und deren Schnittpunkte mit den Seilecken konnten als endgültige Ecken der Momentenflächen angesehen werden.

Für die in dem Längsschnitt der Fig. 39 angegebenen Laststellung fiel die Last I zwischen 6 und 7, Last III zwischen 11 und 12, was durch Eintragen der Ecken 6′, 7′, sowie 11′, 12′ der zugehörigen Momentenfläche berücksichtigt wurde. In der gefährlichsten Stellung des Zuges fällt eine der Lasten zwischen Schwelle 10 und 11, dem-

entsprechend sind in der zugehörigen Momentenfläche die Ecken 10' und 11' entstanden.

In beiden Momentenflächen entsteht infolge der Wirkung des Auslegers (bei Schwelle 11) ein *negatives* Moment. Dies ergibt sich, wenn die *Schlußlinie* $a'b'$ richtig eingezeichnet wird, nämlich so, daß die Schnittpunkte c' und b' in den Stützensenkrechten durch Verlängern *der äußern* Seileckseiten festgelegt werden (vgl. I. **61**, b, Fig. 155). Für die im Längsschnitt der Fig. 39 eingezeichnete Laststellung ergab sich als äußere Seileckseite die an den Lastpunkt 11 stoßende Seite 11'—12', für die gefährlichste Lastlage die Seite 10'—11'.

In der Figur 39 *abgegriffen* stellte sich das größte Moment auf

$$M_8 = H \cdot \eta_8 = 7{,}5 \cdot 0{,}75 = \text{rund } 5{,}625 \text{ mt.}$$

Durch Rechnung erhält man

$$M_8 = A_8 \cdot 1{,}05.$$

Darin ist

$$A_8 = \frac{8\left[(2{,}8 - 1{,}05) + \frac{0{,}5}{0{,}7} \cdot 0{,}35 - \frac{0{,}2}{0{,}7} \cdot 0{,}35\right]}{2{,}8} = \frac{3{,}8}{0{,}7}\ \text{t.}$$

Oder

$$M_8 = \frac{3{,}8}{0{,}7} \cdot 1{,}05 = 5{,}7 \text{ mt.}$$

b. Stützendrücke. Um sich zunächst ein Bild davon zu machen, welchen Einfluß der rollende Lastenzug auf den *Stützendruck C des mittlern Querträgers* ausübt, zeichnet man zweckmäßig die *Einflußlinie für C*, wie das in der Fig. 40 geschehen ist. Ohne Rücksicht auf die lastübertragende Wirkung der Querschwellen erhält man dafür *zwischen den Stützen a und b* die Linie $a'c'b'$, deren Ordinate η_c *gleich der Lasteinheit* gemacht worden ist. Sobald die Einzellast auf die *Ausleger*enden tritt, wird der Stützendruck in *C negativ*, so daß der Gesamtverlauf der Einflußlinie durch die Punkte 2, 2', a', c', b', 11', 11 gegeben ist. Nachträglich ist diese Linie aber noch zu berichtigen mit Rücksicht darauf, daß sie zwischen zwei Querschwellen *stets eine Gerade* sein muß. Danach erhält die Linie ihre endliche Gestalt mit 2—2'—a—6'—7'—b'—11'—11.

Die gezeichnete Einflußlinie für C kann gleich benutzt werden, um C zu berechnen. Zu dem Zwecke ist die gefährlichste Lastlage einzutragen. Dabei muß eine der Lasten an einer der ausspringenden Ecken 6' oder 7' liegen (**6**, b). Dann findet man durch *Abgreifen* in der Figur, worin $\eta_c = 1 \text{ t} = 34$ mm gilt:

$$C = \sum P\eta = 8\,\frac{(10 + 29{,}3 + 18 - 0{,}7)}{34} = 13{,}7 \text{ t.}$$

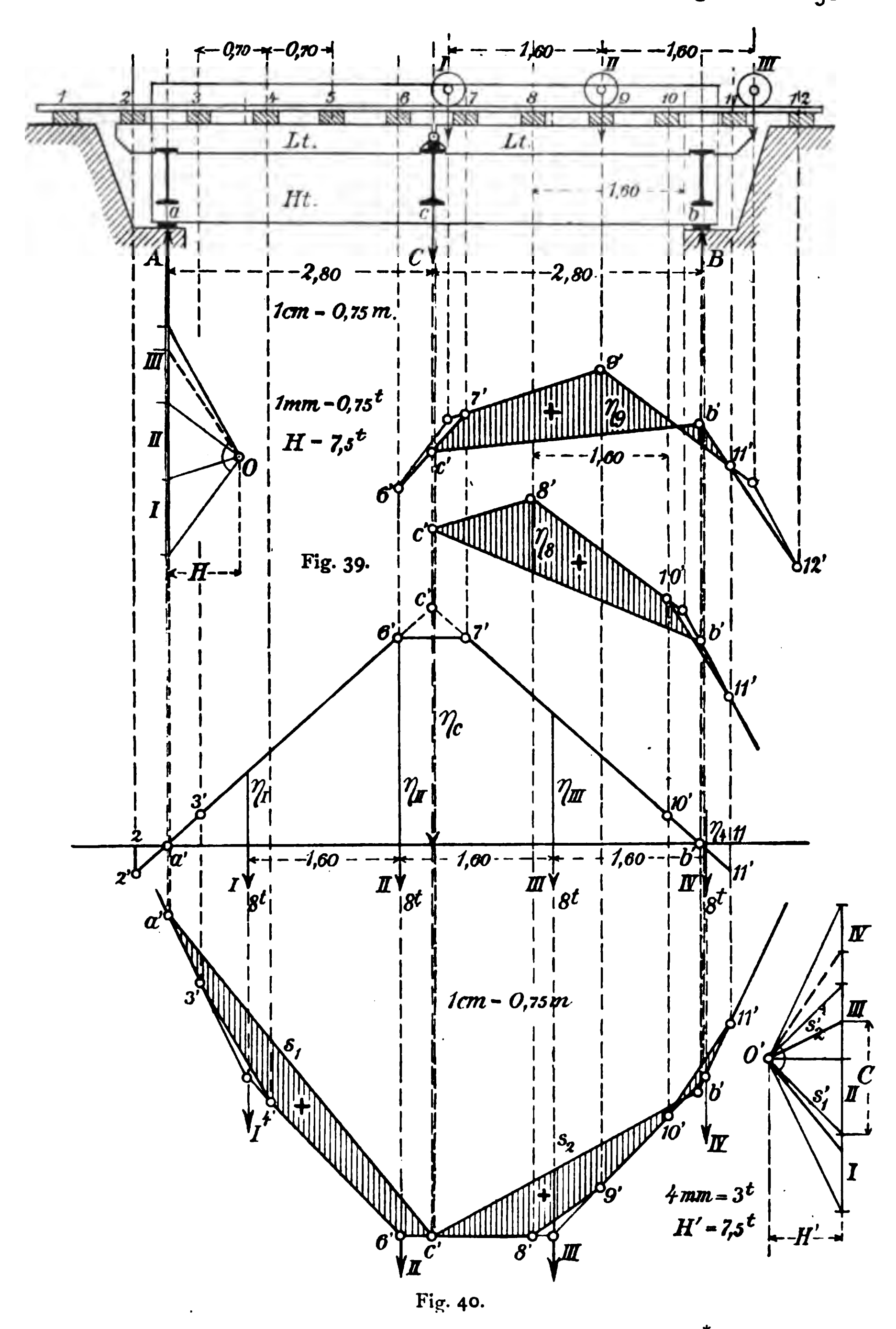

0,70
0,70
1,60
1,60
I
II
III
Lt.
Ht.
a
c
b
A
C
B
2,80
1cm = 0,75 m.
1mm = 0,75^t
H = 7,5^t
O
H
1,60
η_9
η_8
η_c
η_I
η_II
η_III
1,60
8^t
IV
1cm = 0,75 m
s_1
s_2
O'
C
4mm = 3^t
H' = 7,5^t
H'

Fig. 39.

Fig. 40.

Durch Rechnung ergibt sich:

$$C = \frac{8}{2,8}\Big[(2,8 - 0,35) + (2,8 - 0,35 - 1,6) + (2,8 - 1,6 + 0,35) +$$
$$+ \left(\frac{0,3}{0,7}\cdot 0,35 - \frac{0,4}{0,7}\cdot 0,35\right)\Big] = \frac{4,80\cdot 8}{2,8} = 13,7 \text{ t}.$$

Schließlich ist in der Fig. 40 der Stützendruck noch einmal *graphisch mit Hilfe der Momentenflächen* der beiden Längsträger ac und bc bestimmt. Dabei ergab sich nach erfolgtem Eintragen der Schlußlinien s_1 und s_2 die Momentenfläche des linksseitigen Trägers positiv, während diejenige des andern Trägers infolge der Wirkung der Last IV auf dessen *Ausleger*ende eine entsprechende *negative* Teilfläche aufweist. Überträgt man die Schlußlinien durch die Parallelen s_1' und s_2' in das Krafteck bei O', so wird durch sie auf der Kraftlinie eine Strecke C abgeschnitten, die, *abgegriffen*, nach dem Maßstabe 4 cm = 3 t

$$C = \frac{18,3\cdot 3}{4} = 13,7 \text{ t}$$

ergibt. C ist auf diese Weise dreimal berechnet worden. Auch die größten Stützendrucke A und B findet man auf gleiche Weise.

§ 3. Die Stabkräfte der einfachen Balkenfachwerke.

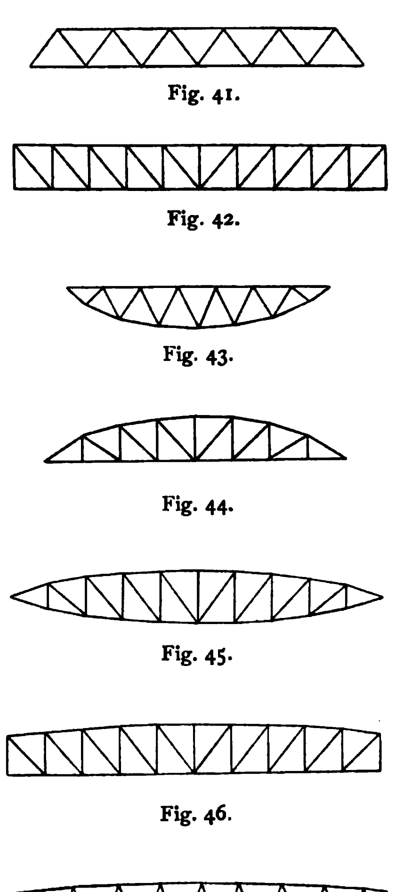
Die wesentlichen Unterschiede zwischen *Balken*trägern und *Bogen*trägern, sowie auch zwischen *einfachen* und *zusammengesetzten* Fachwerken sind bereits in der Einleitung (unter **1**) hervorgehoben worden.

16. Die Trägersysteme. Einfache Fachwerke besitzen keine Zwischengelenke. Wir wiederholen, daß sie nur aus einer einzigen Scheibe bestehen und, wenn sie *außen* statisch bestimmt sind, durch drei Stäbe an die Erdscheibe geschlossen werden. Sie sind also stets *Träger auf zwei Stützen mit oder ohne Ausleger.* Die Auslegeträger sollen, wie auch in der Einleitung schon gesagt wurde, in Verbindung mit den zusammengesetzten Fachwerken behandelt werden.

Man kann auch eine über *drei Stützen* durchgehende Scheibe *starr oder statisch* bestimmt mit der Erde verbinden. Dazu braucht man aber, wie im ersten Bande (I. **22**) gezeichnet und erörtert worden ist, ein sog. *gedachtes Gelenk*, das als ein Zwischengelenk anzusehen ist. Deshalb zählt man einen solchen statisch bestimmten durchgehenden Träger wohl am besten zu den zusammengesetzten Fachwerken.

a. Benennung der Träger nach ihrem Scheibenumriß. Die wichtigsten Systeme sind in den Fig. 41 bis 47 dargestellt.

1. *Parallelträger* (Fig. 41 und 42) zeigen gerade parallele Gurtlinien.
2. *Bogensehnen-Träger* (Fig. 43 und 44) besitzen einen geraden und einen in den Stützpunkten endigenden gebrochenen Gurt. Der Name kommt von der alten englischen Bezeichnung *bowstring* her. Liegt der gerade Gurt oben, so heißt der Träger im besondern auch *Fischbauch*träger. Liegen die Knotenpunkte des gebrochenen Gurtes in einer Parabel, so spricht man von einem *Parabel*-Träger (**20**, b).
3. Ein *Linsenträger* entsteht, wenn beide Gurtlinien gebrochen sind und in den Stützpunkten endigen (Fig. 45).
4. Ein *abgestumpfter Bogensehnen*-Träger (Fig. 46) oder ein *abgestumpfter Linsen*-Träger (Fig. 47) entsteht, wenn die beiden zugehörigen Gurtlinien sich nicht in den Stützpunkten schneiden.


Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.

b. Gurte und Wandglieder. Von einem Gurte zum andern kann eine Kraft nur dadurch übertragen werden, daß man sie *nach zwei Richtungen* hin zerlegt. Das geschieht durch *zwei Scharen* von Wandstäben, von denen die eine Schar den *Zug*, die andere den *Druck* aufzunehmen hat. So verhindern die Wandstäbe das Wiederverkürzen des gezogenen und das Wiederverlängern des gedrückten Gurtes.

Holzträger mit einer Dreiecksgliederung ihrer Wand gab es schon zu römischen Zeiten (I. **38**). Besonders bemerkenswert sind solche

Gliederungen, die PALLADIO (1570) in seinen vier Büchern der Architektur gezeichnet hat (I. **38**, Fig. 95—96). Eine genauere Berechnung der Wandstäbe verstand man aber selbst zu NAVIERS Zeit noch nicht. Man betrachtete damals die Wandgliederungen, die dabei gewöhnlich nur als Andreaskreuze angeordnet waren, zwar als notwendige Beigabe, um die Gurte miteinander zu verbinden, berechnete aber nur die *Gurt*querschnitte, je nach der Größe des auf sie fallenden Anteils der Biegemomente[1].

Wenn auch die Knoten eines gebrochenen Gurtes meist in einer vorgeschriebenen krummen Linie liegen (Parabel, Hyperbel, Ellipse, Kreis), so werden doch konstruktiv die einzelnen Gurtstäbe zwischen den Knoten in der Regel *gerade* ausgeführt. Jedoch werden zuweilen zugunsten der ästhetischen Wirkung gebrochene Gurtlinien vermieden und an ihre Stelle durchweg krumme Linien gesetzt. In solchen Gurten ist dann jeder Stab wirklich ein krummer (Fig. 48), wobei statisch der Nachteil entsteht, daß er — außer der durch seine Knoten verlaufenden Längskraft S — im gefährdetsten Querschnitt auch noch ein Biegemoment $S \cdot v$ aufzunehmen hat, wenn v der Hebelarm der Längskraft ist. Die daraus zu berechnenden Biegungsspannungen des Stabes sind als *Nebenspannungen* (I. **16**, c) aufzufassen und bei der Querschnittsbemessung mit zu berücksichtigen.

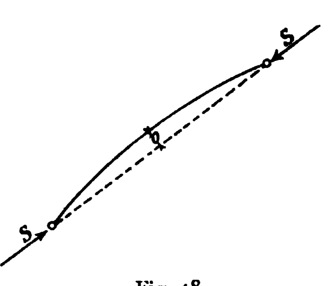


Fig. 48.

Man unterscheidet *einteilige* und *mehrteilige* Wandgliederungen. In der einteiligen Wand kommen *keine Stabkreuzungen* vor; sie zeigt also stets ein Dreieckstabwerk (I. **26**, S. 48). Bei mehrteiligen Wandgliederungen erleidet jeder Wandstab des einteiligen Grundsystems so viel Male eine Stabkreuzung, als die Zahl der außer ihm eingelegten Systeme beträgt. Man spricht also von einem m-teiligen Wandsystem, wenn darin jeder Wandstab des ursprünglichen Dreieckstabwerkes m Kreuzungen erhält.

Mehrteilige Wandgliederungen machen das Trägerstabwerk im allgemeinen innen statisch unbestimmt. Nur in einigen besondern Fällen gelingt es, mehrteilige Systeme innen statisch bestimmt anzuordnen (vgl. I. **26**, Fig. 57 und I. **27**, a, Fig. 66).

[1] MEHRTENS. Der deutsche Brückenbau im 19. Jahrhundert. 1900, S. 11, Fig. 12—13.

Im vorliegenden Bande werden nur Dreieckstabwerke zur Berechnung kommen. Deren Wandstäbe heißen im allgemeinen *Streben.* Diese werden aber *Ständer* genannt, wenn ihre Stabachse parallel zur Richtung der Trägerlasten verläuft. Danach sind die von den Stützpunkten auslaufenden Stäbe entweder *Endständer* oder *Endstreben.* Das Trägerfachwerk selbst ist entweder ein

*Streben*fachwerk oder *Ständer*fachwerk,

je nachdem es wie in Fig. 41, 43 und 47 oder wie in Fig. 42, 44, 45 und 46 angeordnet ist.

c. Der Vieleckträger als Berechnungsgrundlage. Aus der gegebenen Übersicht der wichtigsten Trägerformen geht hervor, wie man die allgemeine Trägergestalt erhält, wenn man beide Gurte als gebrochen annimmt und als Wandgliederung ein Strebenfachwerk wählt (Fig. 49).

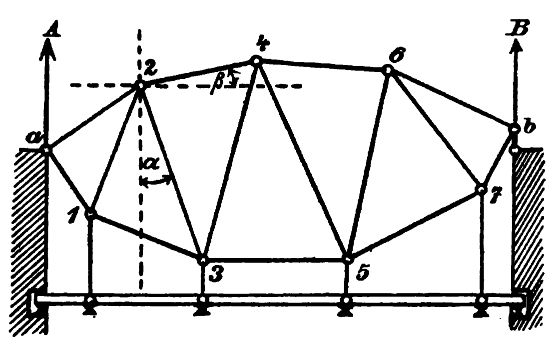


Fig. 49.

Der Winkel, den eine Strebenrichtung mit der Lotrechten einschließt, sei α. Dann ist für den Sonderfall, daß die Strebe in einen lotrecht gestellten Ständer übergeht, $\alpha = 0$ zu setzen. Ebenso geht der Winkel β, den die Richtung irgend eines Gurtstabes mit der Wagrechten bildet, in Null über, sobald der Stab wagrecht liegt. Danach kann man die für einen *Vieleckträger* der Fig. 49 erhaltenen analytischen Beziehungen leicht auf die Berechnung von Sonderfällen zurückführen.

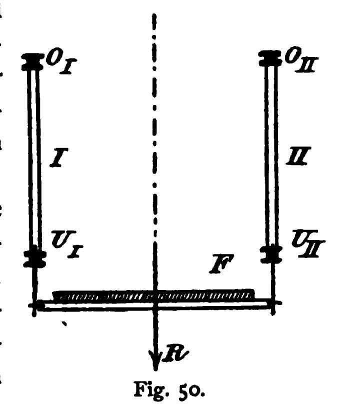


Fig. 50.

Um klar darüber zu werden, wie die Lasten der Fahrbahn auf die Fachwerkknoten des *Lastgurtes* übertragen werden, denke man sich die zu berechnende Konstruktion als aus *zwei* gleichen lotrecht gestellten *Hauptträgern* bestehend, deren Fahrbahn F entweder *oben* oder *unten* liegt, d. h. also entweder auf den Obergurt *gestützt* oder an den Untergurt *gehängt* ist (Fig. 50). Alle auf der Fahrbahn verkehrenden Lasten R

werden dann *mittelbar* auf die Knoten des Lastgurtes (an welchem die Fahrbahn liegt) übertragen. Dabei überträgt sich im allgemeinen auf jeden der beiden Hauptträger I und II *nicht die gleiche Last.* Nur in einem Falle, wenn nämlich alle Mittelkräfte R der Verkehrslasten in einer zu beiden Hauptträgern symmetrisch liegenden Ebene wirken, erhält jeder Hauptträger in jedem Fahrbahnfelde ef den gleichen Lastanteil. Dieser Fall soll bei den Berechnungen des vorliegenden Bandes, wenn nicht ausdrücklich anders bestimmt wird, immer vorausgesetzt werden.

Es bleibt noch festzustellen, in welcher Weise das *Eigengewicht* eines Hauptträgers auf dessen Knoten zu verteilen sein wird. Dabei darf der Querschnitt jedes einfachen Stabes, abgesehen von unwesentlichen konstruktiven Zutaten an einzelnen Stellen, auf seiner ganzen Länge überall gleich angenommen werden, so daß sich *auf jeden seiner Knoten unmittelbar das halbe Stabgewicht überträgt.* Außerdem sind bei einfachen Balkenträgern die Stabquerschnitte von Obergut und Untergut nicht wesentlich voneinander verschieden. Deshalb darf man *das Eigengewicht des Trägers in jedem Trägerfelde je zur Hälfte auf die Knoten des Ober- und Untergurts verteilen.* Das *Eigengewicht der Fahrbahn* überträgt sich dagegen allein auf die Knoten des Lastgurtes. Ebenso werden sonstige Querkonstruktionen (I. **10**) allein in demjenigen Gurte übertragen, an welchem sie unmittelbar befestigt sind.

Gewöhnlich wird angenommen, daß sowohl das Eigengewicht der Träger, als auch ihrer Fahrbahn und sonstigen Querkonstruktionen *gleichmäßig über die Stützweite* verteilt ist. Das ist bequem für die Rechnung und stimmt für die Fahrbahn usw. auch in der Regel genau genug. Für das Trägergewicht gilt die Annahme aber nicht mehr genau genug, wenn etwa das Eigengewicht die Hauptrolle bei der Belastung spielen sollte (I. **12**). Bei entsprechend großer Stützweite lohnt es sich daher, wenn man bei der Rechnung schätzungsweise vorausbestimmt, wieviel vom Eigengewicht *auf jede Knotenweite oder Feldweite* entfällt.

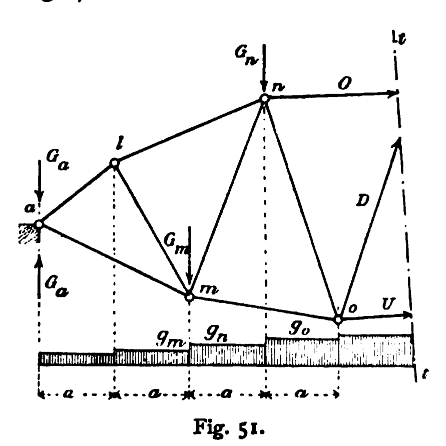


Fig. 51.

Sind die Knotenweiten a (Fig. 51) — wie das meist der Fall ist —

gleich groß, so entfällt auf einen Knoten m des Untergurtes ein Eigengewicht G_m, das bestimmt ist durch die Gleichung

$$G_m = \frac{a}{2}(g_m + g_n),$$

wenn g_m und g_n die Trägergewichte für die Einheit der Knotenweite a links und rechts von m bedeuten. Desgleichen berechnet sich das Gewicht G_n für den Knoten n des Obergurts

$$G_n = \frac{a}{2}(g_n + g_o).$$

Wird das Gewicht g für die *Einheit der Stützweite* überall gleich gesetzt, so erhält man

$$G_m = G_n = ag.$$

Das auf einen Stützpunkt a übertragene Eigengewicht G_a kann bei der *Stabkraft*berechnung von vornherein außer acht gelassen werden, weil es durch die dadurch erzeugte ebenso große Stützenkraft zu Null aufgehoben wird.

17. Beziehungen zwischen den äußern und innern Kräften bei ständiger Belastung.

a. Beziehungen der Stabkräfte zum Momente. Die Knotenpunkte des Vieleckträgers der Fig. 52 sind von der linksseitigen Stütze ab der Reihe nach numeriert. Jeder Knoten sei beliebig (lotrecht) und beständig belastet. Die Lage der Fahrbahn ist gleichgültig. In irgend einem Trägerfelde werde ein Schnitt tt geführt, der immer nur drei Stäbe treffen wird.

Wir bestimmen die Stabkräfte nach dem Verfahren von Ritter (I. **68**), legen daher zuerst die jedem Stabe zugeordneten Momentenpunkte fest. Das sind

für den *Obergurtstab* der Schnittpunkt m von Untergurt- und Wandstab
- - *Untergurtstab* - - n - Obergurt- - -
- - *Wandstab* - - i - - und Untergurtstab.

Bezeichnet man das Moment aller *äußern* Kräfte (Stützenkraft und Lasten) für den rechten oder linken Trägerteil in bezug auf obige Schnittpunkte der Reihe nach mit

$$M_m, \; M_n \text{ und } M_i,$$

sowie die zugehörigen Schnittkräfte entsprechend mit

$$O_m, \; U_n \text{ und } D_i,$$

so erhält man durch Nullsetzen der Summen der Momente aus den äußern und innern Kräften unter Beachtung des Drehsinns (I. **47**, b) und unter Benutzung der in der Fig. 52 eingeschriebenen Hebelarme r_m, r_n und r_i der Stabkräfte:

$$\begin{aligned} O_m r_m + M_m &= 0 \\ -U_n r_n + M_n &= 0 \\ -D_i r_i \pm M_i &= 0\,. \end{aligned} \qquad (14)$$

Darin sind M_m und M_n, als Momente zwischen den Stützen, stets *positiv*, während M_i (für einen Momentenpunkt *außerhalb* der Stützweite) im allgemeinen sowohl positiv als negativ sein kann. Um dies in ein-

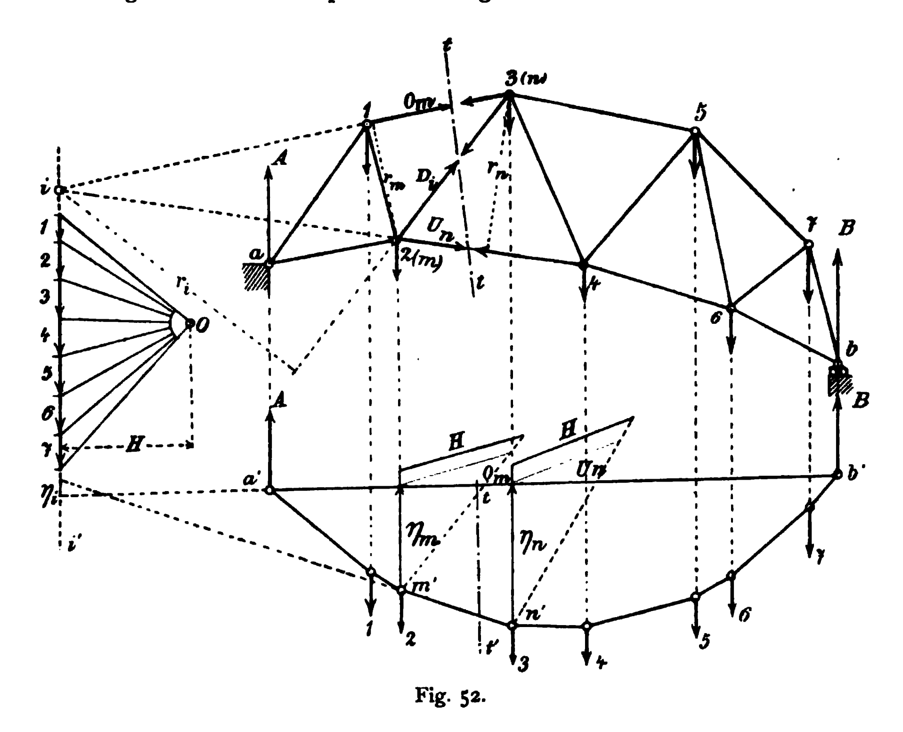


Fig. 52.

fachster Weise zu veranschaulichen, ist in der Fig. 52 zu einer gegebenen Belastung der Knoten die Momentenfläche gezeichnet. Danach fällt M_i negativ aus, weil die an den Schnitt tt stoßenden Seileckseiten — das sind die Schlußlinie $a'b'$ und die Seite $m'n'$ — auf der durch den Momentenpunkt i verlaufenden Richtung der Mittelkraft der äußeren Kräfte (einer Lotrechten) eine Strecke η_i abschneiden, die der positiven Momentenfläche gegenüber liegt (I. **60**, b).

Aus den Gleichungen (14) folgt

$$
\begin{aligned}
O_m &= -\frac{M_m}{r_m} \\
U_n &= +\frac{M_n}{r_n} \\
D_i &= \pm\frac{M_i}{r_i},
\end{aligned}
\tag{15}
$$

in Worten: *In einfachen Balkenfachwerken erfährt ein Obergurtstab stets Druck, ein Untergurtstab stets Zug, während ein Wandstab, je nach seiner Richtung, entweder Druck oder Zug erleidet.*

Welche besonderen Umstände das Vorzeichen eines Wandstabes beeinflussen, wird weiterhin ausführlich dargelegt werden (**17**, c).

Bezeichnet man allgemein eine der drei Schnittkräfte mit S, das zugehörige Moment mit M, den Hebelarm mit r, so gilt für jede Stabkraft die Gleichung

$$S = \frac{M}{r}. \tag{16}$$

Diese wichtige Gleichung lautet in Worten:

Stabkraft gleich Moment dividiert durch Hebelarm. Dabei gilt als Momentenpunkt für jede der Stabkräfte der Schnittpunkt der beiden andern. Das Moment ist gleich der Summe der statischen Momente der Stützenkraft und der Knotenlasten des betrachteten, links oder rechts vom Schnitte liegenden Trägerteiles.

Die Momentenpunkte für die Berechnung der *Gurtstab*kräfte liegen stets dem betreffenden Stabe gegenüber. Sie sind also durch das Trägernetz gegeben, ebenso wie die zugehörigen Hebelarme. Dagegen müssen Momentenpunkt und Hebelarme zur Berechnung der *Streben*kräfte immer besonders gezeichnet und festgelegt werden, in manchen Fällen liegen sie sogar unbequem weit außerhalb des Zeichenbrettes.

Daraus folgt, daß die Gl. (16) besonders für die Bestimmung der Gurtstabkräfte geeignet erscheint. Die Strebenkräfte werden in vielen Fällen einfacher auf andern Wegen berechnet, wie das weiterhin gezeigt wird (**21**).

Aus der Gleichung

$$S = \frac{M}{r}$$

folgt ohne weiteres eine einfache *graphische Darstellung* der Stabkräfte. Es ist

$$M = H\eta,$$

also
$$\frac{S}{H} = \frac{\eta}{r}. \tag{17}$$

Danach sind in der Momentenfläche der Fig. 52 die Stabkräfte O_m und U_n (in *rother* Farbe) dargestellt: Dabei wurden auf den betreffenden Knoten-Senkrechten die gegebenen Hebelarme r und in deren Endpunkten (in beliebiger Richtung) die *Polweite* H des Kraftecks aufgetragen. In den so aus r und H gebildeten Dreiecken liegen dann die gesuchten Strecken für O_m und U_n parallel zu H.

b. Beziehungen der Stabkräfte zur Querkraft. Wir betrachten den linken Teil des Vieleckträgers der Fig. 53 mit unten anhängender Fahrbahn. Denkt man sich im beliebigen Felde ef einen Schnitt gelegt, so kann man alle äußern Kräfte links vom Schnitte zu einer Mittelkraft Q zusammensetzen (I. **67**), die *Querkraft* genannt wird. In Beziehung auf irgend einen Punkt der Ebene muß das Moment der Querkraft gleich dem Moment M der äußern Kräfte des betrachteten Trägerteiles sein, also

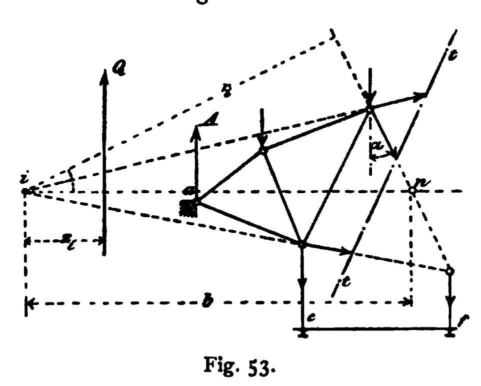


Fig. 53.

$$M = Qz, \tag{18}$$

wenn z der Hebelarm von Q für den beliebigen Momentenpunkt bedeutet.

Die Gleichungen (15) lassen sich danach umschreiben in

$$O_m = -Q\frac{z_m}{r_m}$$
$$U_n = +Q\frac{z_n}{r_n} \tag{19}$$
$$D_i = \pm Q\frac{z_i}{r_i}.$$

Für die Anwendung sind diese Gleichungen nur in einigen Sonderfällen, die weiterhin besprochen werden, bequem. Im allgemeinen erschweren sie die Berechnung dadurch, daß für die gegebene Belastung jedesmal die *Lage der Querkraft* aufzusuchen ist, die analytisch, durch vorherige Festsetzung von M, aus

$$z = \frac{M}{Q}$$

folgt und graphisch in bekannter Weise (I. **67**) durch verlängern der an den Schnitt stoßenden Seileckseiten gefunden wird.

Für die Bestimmung der Größe und des Vorzeichens der *Wandstab*-kräfte läßt sich die obige Gleichung

$$D_i = \pm \frac{Q z_i}{r_i}$$

auf eine bequemere Form bringen, wenn man im Schnittfelde die Richtung des Wandstabes verlängert, bis sie eine durch den Momentenpunkt i gelegte Wagerechte in n schneidet und den Abstand $in = b$ in die Rechnung einführt. Wie dann auch der Wandstab gerichtet sein möge, stets wird die Beziehung

$$r_i = \pm b \cos \alpha$$

gelten, woraus sich

$$D_i = \pm \frac{z_i}{b} \frac{Q}{\cos \alpha} \tag{20}$$

ergibt. Darin können z_i, b und $\cos \alpha$ sowohl positiv als auch negativ werden (vergl. auch **20**).

Für den Sonderfall von einander *parallelen Gurtstäben* im Schnittfelde liegt i in unendlicher Ferne. Der Quotient $\frac{z_i}{b}$ nähert sich dann der Grenze 1 und man erhält

$$D_i = \pm \frac{Q}{\cos \alpha}. \tag{21}$$

Wäre dabei der Wandstab ein *Ständer*, so ergäbe sich (aus $\cos \alpha = 1$) für die Ständerkraft V_i

$$V_i = \pm Q. \tag{22}$$

c. Fallende und steigende Wandstäbe.

1. Es empfiehlt sich zuerst einen der beiden links oder rechts vom Schnittfelde liegenden Trägerteile als *unbelastet* anzusehen. Welcher Trägerteil dann auch betrachtet wird, und welche Richtung ein Wandstab dabei auch haben möge, es wird immer ausreichen *fallende* und *steigende* Stäbe zu unterscheiden:

Je nachdem im betrachteten Trägerteile, links oder rechts vom Schnitte, ein Wandstab vom Obergurte oder Untergurte ausläuft, heißt er ein fallender oder ein steigender Stab.

Strebe D_i ist in Fig. 54 *steigend*, in Fig. 55 *fallend*.

Daraus folgt ohne weiteres:

Ein fallender (oder steigender) Wandstab des einen Trägerteiles ist im andern Teile steigend (oder fallend) zu nennen.

Wenn einer der beiden Trägerteile als *unbelastet* angesehen wird, ist die Mittelkraft aller auf den betrachteten Trägerteil wirkenden äußern Kräfte die *Stützenkraft*, denn diese ist die einzige dort vorhandene äußere Kraft. Man erhält also für einen unbelasteten linken Trägerteil (aus der Gl. (20) für

$$Q = A$$

$$D = \pm \left(\frac{c}{b}\right) \frac{A}{\cos\alpha}, \tag{23}$$

wenn c den wagrechten Abstand des Stützpunktes a vom Momentenpunkte i bezeichnet (Fig. 54 und 55).

A und c sind stets positiv; $\frac{c}{b}$ kann positiv oder negativ sein, je nachdem die Richtung des geschnittenen Wandstabes rechts (Fig. 54) oder links (Fig. 55) vom Momentenpunkte einschneidet; $\cos\alpha$ kann ebenfalls positiv oder negativ sein.

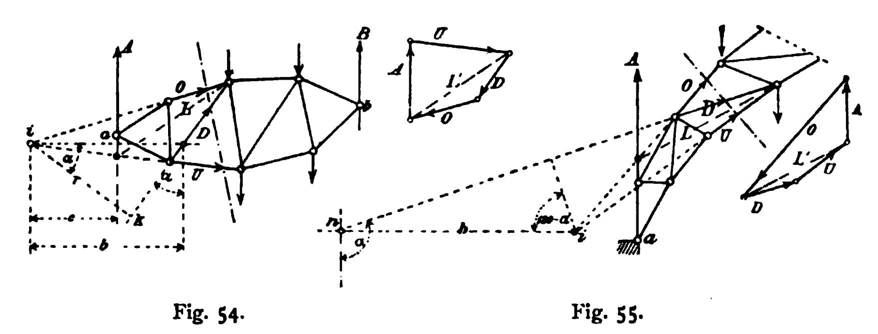


Fig. 54. Fig. 55.

Aus der Gl. (23) läßt sich, wie auch die Fig. 54 und 55 erläutern, unmittelbar folgender Satz herleiten:

Bei außerhalb der Stützen liegendem Momentenpunkte erfährt im unbelasteten Trägerteile ein fallender Wandstab Zug, ein steigender dagegen Druck. Denn $\cos\alpha$ und b haben beide gleiches oder ungleiches Vorzeichen, je nachdem sie einem fallenden oder steigenden Stabe angehören. Die Richtigkeit des Satzes ergibt sich auch aus der Betrachtung des Drehsinns der Momente von A und D in bezug auf i.

Hieran schließt sich der Zusatz:

Fällt der Momentenpunkt mit einem Stützpunkte des unbelasteten Trägerteiles zusammen, so verschwindet die zugehörige geschnittene Wandstabkraft. Denn das Moment der Stützenkraft ist dann Null.

Wenn die Teilbelastung (die auch eine wandernde Einzellast sein kann) jetzt von einem Trägerteile auf den andern übergeht, so ist zu folgern:

Beim Übergange der Belastung von einem Trägerteile auf den andern erfährt der geschnittene Wandstab, wenn der zugeordnete Momentenpunkt außerhalb der Stützen liegt, einen Spannungswechsel (I. **6**).

Ausnahmsweise kann bei einfachen Balkenträgern (ohne Auslegerenden) der einem Wandstabe zugeordnete Momentenpunkt auch zwischen den Stützpunkten liegen (Fig. 56). In solchem Falle ist, wie leicht zu erkennen, der Sinn des betreffenden, auf den Schnittpunkt der Gurtstabrichtungen bezogenen Momentes sowohl für linksseitige als auch für rechtsseitige Teilbelastung der gleiche, entweder positiv oder negativ. Daraus ist zu entnehmen:

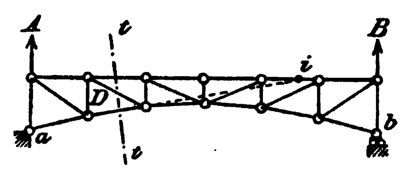


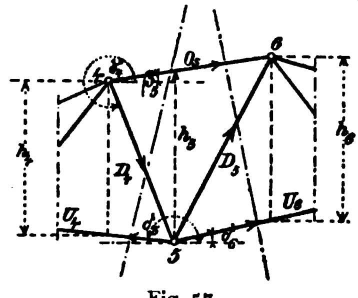
Fig. 56.

Bei innerhalb der Stützweite fallendem Momentenpunkte erfährt ein und derselbe Wandstab bei beliebiger ständiger oder veränderlicher Belastung einerlei Spannung, entweder Zug oder Druck.

Für eine *wandernde Einzellast* ist danach im besondern auszusagen: *Je nachdem der zugeordnete Momentenpunkt außerhalb oder innerhalb der Stützweite liegt, besitzt die Einflußfläche der Wandstabkraft eine Lastscheide* (**3**) *oder nicht* (**18**).

Die oben ausgesprochenen Sätze lassen sich in einfacher Weise auch aus der Betrachtung der geschlossenen Kraftvierecke herleiten, die für den unbelasteten Trägerteil aus der Stützenkraft und den drei Schnittkräften gezeichnet werden. Man vergleiche dazu die Fig. 54 und 55.

2. Für einen unbelasteten Trägerteil ist nach vorigem das Vorzeichen einer Wandstabkraft unmittelbar gegeben. Sobald aber beide Trägerteile in beliebiger Weise belastet sind, läßt sich das Vorzeichen nicht immer ohne weiteres bestimmen. Und doch ist es wünschenswert, ein einfaches Kennzeichen dafür zu besitzen, namentlich um mit dessen Hilfe wichtige statisch-konstruktive Fragen beantworten zu können.


Fig. 57.

In dem Vieleckträger der Fig. 57 sind die Knoten der Reihe nach numeriert. Wir betrachten drei beliebige aufeinander folgende Knoten 4, 5 und 6. Dann gilt für die Strebekraft D_4 (vorläufig ohne Rücksicht auf Vorzeichen) die Gleichgewichts-Bedingung

$$O_5 \cos\beta_5 + D_4 \cos\gamma_4 + U_4 \cos\delta_4 = 0.$$

Desgleichen für die Strebenkraft D_5:

$$O_5 \cos \beta_5 + D_5 \cos \gamma_5 + U_6 \cos \delta_6 = 0,$$

wenn β, γ, δ der Reihe nach die von den betreffenden drei Schnittstäben mit einer *Wagrechten* eingeschlossenen Winkel vorstellen. Werden die *Trägerhöhen* in den Knoten-Senkrechten mit h bezeichnet, so folgt aus der Gl. (15), wenn die Hebelarme r darin durch h ausgedrückt werden:

$$O_5 = \frac{-M_5}{h_5 \cos \beta_5}; \qquad U_4 = \frac{+M_4}{h_4 \cos \delta_4}; \qquad U_6 = \frac{+M_6}{h_6 \cos \delta_6}.$$

Daraus ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} &\text{für die } \textit{fallende} \text{ Strebe: } & D_4 \cdot \cos \gamma_4 &= \left(\frac{M_5}{h_5} - \frac{M_4}{h_4}\right) \\ &\text{- - } \textit{steigende} \text{ - } & D_5 \cdot \cos \gamma_5 &= \left(\frac{M_5}{h_5} - \frac{M_6}{h_6}\right). \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Weil die Werte von $\cos \gamma$ immer positiv sind, so ergeben die Gl. (24) das folgende *allgemeine Kennzeichen zur Bestimmung des Vorzeichens einer beliebigen fallenden oder steigenden Strebe.*

Ist:

$$\frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} > \frac{M_m}{h_m},$$

so wird im betrachteten Trägerteile eine fallende Strebe gezogen und eine steigende gedrückt, wenn m *und* $m+1$ *die Gurtknoten bezeichnen, zwischen denen der Stab liegt.*

3. Das obige Kennzeichen kann gleichzeitig auch benutzt werden, um diejenige *Belastung und Trägergestalt* festzustellen, bei welcher die Strebenkraft eines beliebigen Feldes verschwindet.

Die Bedingung dafür lautet:

$$\frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} = \frac{M_m}{h_m}. \qquad (25)$$

Ersetzt man das Moment M allgemein durch das bekannte Produkt aus Polweite mal Höhe der Momentenfläche (I. **61**, b)

$$M = H\eta,$$

so geht Gl. (25) über in

$$\frac{h_m}{h_{m+1}} = \frac{\eta_m}{\eta_{m+1}},$$

in Worten:

Wenn die in den Knoten gemessenen senkrechten Trägerhöhen den zugehörigen Momenten proportional sind, so verschwinden die Stabkräfte aller Streben, die zwischen den Knoten liegen.

Dieser Satz wird (unter **20**, b) verwendet werden, um den Einfluß der Trägergestalt auf den Spannungswechsel der Wandstäbe zu beleuchten.

18. Einflußlinien der Stabkräfte und ihre Verwendung.

a. Allgemeines Verfahren der Darstellung. Nach der Gl. (16)

$$S = \frac{M}{r}$$

ist eine Stabkraft gleich Moment dividiert durch Hebelarm und dieser ist für jede bestimmte Stabkraft eine gegebene Größe.

Daraus folgt: *Die Einflußlinie einer Stabkraft S ist gleich der Einflußlinie des zugehörigen Momentes M, deren Ordinaten mit der Ziffer* $\frac{1}{r}$ *multipliziert sind.*

Nach **5**, c werden die Einflußflächen eines Momentes für einen innerhalb oder außerhalb der Stützen, im Abstande x und x' von diesen liegenden Momentenpunkt *mit Hilfe zweier Grenzlinien* ab' und ba' gezeichnet, die sich auf der Momentenpunkt-Lotrechten schneiden und deren Ordinaten in a und b (abgesehen vom Vorzeichen) gleich den Abständen αx und $\alpha x'$ zu machen sind, wenn α ein beliebiger *Multiplikator* ist derart, daß (für $P = 1$)

$$M = 1 \cdot \alpha \cdot \eta$$

angeschrieben werden kann.

Danach sind in den Fig. 59—61, für einen beliebigen Schnitt im Felde ef der Fig. 58, die Einflußlinien der drei Schnittstäbe O_3, U_2 und D_2 gezeichnet, wobei $\alpha = \frac{1}{r}$ gesetzt worden ist.

Die Ordinaten der Grenzlinien ab' und ba' über den Stützen sind dann für alle drei Linien allgemein:

$$\overline{aa'} = \frac{1 \cdot x}{r}$$

$$\overline{bb'} = \frac{1 \cdot x'}{r}.$$

In diesen Gleichungen bedeuten die Ausdrücke der rechten Seite, in Worten ausgedrückt, *die im betrachteten Stabe durch eine Stützenkraft gleich der Lasteinheit erzeugte Spannkraft.* Bezeichnet man diese allgemein

für $A = 1$ mit S'

- $B = 1$ - S'',

so ist zu ersehen, *wie die Einflußlinie einer Stabkraft S mit Hilfe eines Kräfteplanes für $A = 1$ oder $B = 1$, aus welchem die Strecken der Stabkräfte S' oder S'' zu entnehmen sind, gezeichnet werden können.*

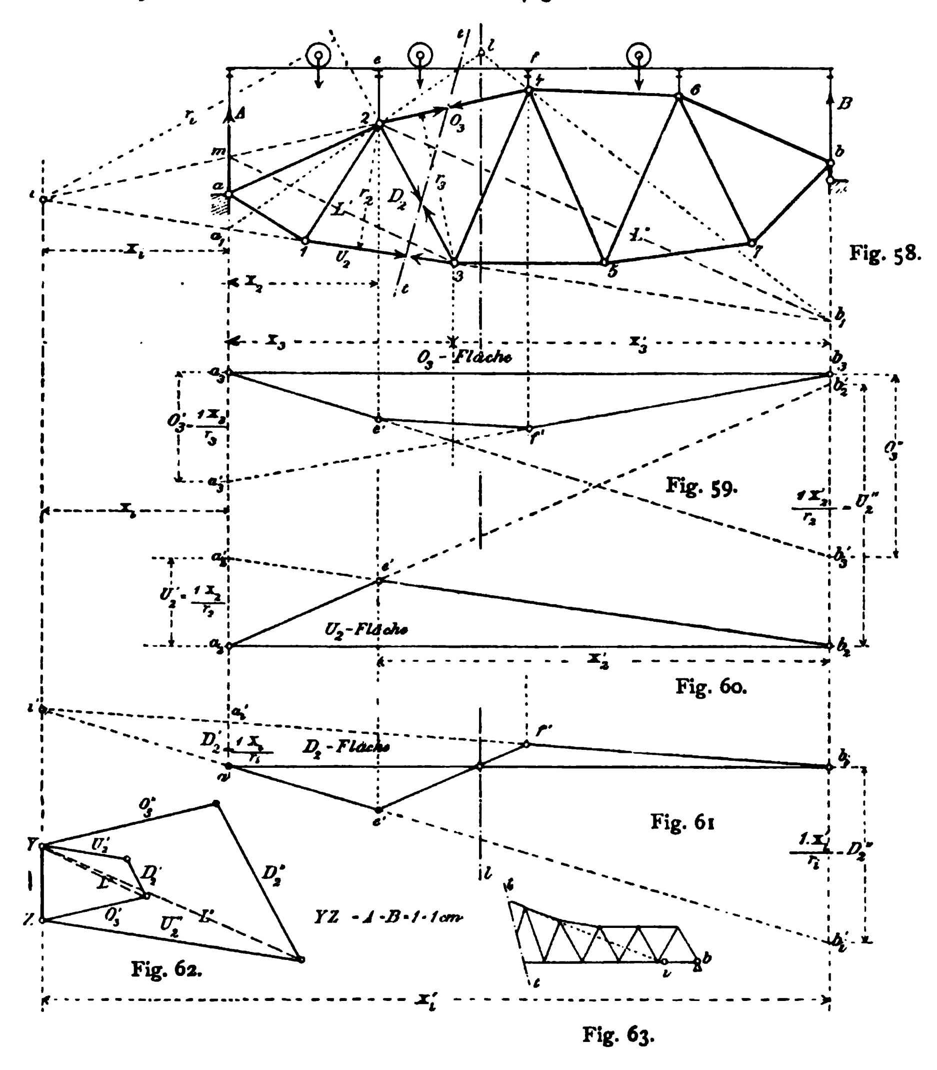


Fig. 58.

Fig. 59.

Fig. 60.

Fig. 61

Fig. 62.

Fig. 63.

Über *die Vorzeichen einer Einflußfläche* ist nach vorigem ohne weiteres das Folgende auszusagen:

Wenn der dem Stabe zugeordnete Momentenpunkt innerhalb der Stützen liegt, so zeigt die Einflußfläche einerlei Vorzeichen, liegt er dagegen außerhalb der Stützen, so besitzt sie eine Lastscheide (**3**).

Die Einflußfläche eines Obergurtstabes ist danach negativ, eines Untergurtstabes dagegen positiv. Ständer und Streben zeigen in ihrer Einflußfläche in der Regel eine *Lastscheide* im Schnittfelde. Bei besonderer Gestalt der Gurte (Fig. 63) kann jedoch für einzelne Wandstäbe der zugeordnete Momentenpunkt innerhalb der Stützen liegen. In diesem Falle erleidet der Wandstab — wie auch schon unter **17**, c (Fig. 56) erörtert worden ist — bei jeder beliebigen Art und Verteilung der veränderlichen Lasten immer nur einerlei Spannung, *entweder Druck oder Zug*. Bei außerhalb liegendem Momentenpunkte erfährt der zugeordnete Wandstab jedoch immer einen *Spannungswechsel* (I. **6**) wenn die veränderliche Last das Schnittfeld, worin die Lastscheide der Einflußfläche liegt (Fig. 58), überschreitet.

Wenn im Schnittfelde *Obergurt und Untergurt parallel* laufen, liegt der dem Wandstabe zugeordnete Momentenpunkt in unendlicher Ferne. In diesem Falle müssen auch die auf einer unendlich fernen Lotrechten sich schneidenden Grenzlinien der Einflußfläche einander parallel laufen.

Über diese besondern Verhältnisse bei der Beanspruchung der Wandstäbe der Balkenträger vergl. ausführlicheres weiterhin unter **20** und **21**. Vorerst soll die Darstellung der in den Fig. 59—61 gegebenen Einflußflächen im einzelnen näher erläutert werden.

b. Aufzeichnen und Nachprüfen der Linien. Die Knoten des als Beispiel gewählten Vieleckträgers (Fig. 58) sind der Reihe nach numeriert, um eine bequeme Bezeichnungsweise der Stabkräfte zu ermöglichen: Jeder Gurtstab erhält als *Zeiger* die Nummer des ihm gegenüber liegenden Knotens, d. h. also die Nummer des ihm zugeordneten Momentenpunktes. Dagegen sind die Wandstäbe der Reihe nach mit D_1 bis D_6 numeriert, so daß ihre Zeiger (bei der Betrachtung des linken Trägerteiles) immer auf denjenigen Knoten hinweisen, von welchem die betreffende Strebe ausläuft.

Darzustellen sind die Einflußflächen der Stabkräfte O_3, U_2 und D_2. Zu dem Zwecke sind zuerst (in der Fig. 62) diejenigen Schnittkräfte dargestellt, die durch eine Stützenkraft $A = 1$ und $B = 1$ erzeugt werden. Das sind

für $A = 1$ die Stabkräfte O_3', U_2' und D_2'
- $B = 1$ - - O_3'', U_2'' - D_2''.

Die Darstellung erfolgte mit Hilfe von *zwei* CULMANN'schen *Kraftvierecken* (I. **49**, a), die beide in der Fig. 62 so zusammen gezeichnet worden sind, daß die Strecke yz als *Belastungseinheit* gelten kann. Dabei wurde $A = 1$ mit O_3' und $B = 1$ mit U_2'' verbunden und über die so erhaltenen punktiert angegebenen Mittelkräfte L' und L'' — deren

Richtung (entsprechend beschrieben) aus der Fig. 58 zu entnehmen ist — wurden einerseits U_2' und D_2', sowie anderseits O_3'' und D_2'' zusammengesetzt. Die dadurch erhaltenen Werte S' und S'' bilden die Grundlagen der Darstellung der Einflußlinien. Man braucht zwar immer nur einen der beiden Werte — entweder S' *oder* S'' — aber der zweite Wert dient *zur Nachprüfung*. Ehe man die Kraftpläne für $A = 1$ und $B = 1$ zeichnet, ist es notwendig, um bequeme Figuren zu erhalten, *das Maß der Lasteinheit zweckmäßig zu wählen. In Fig.* 62 *wurde dafür* 1 cm *genommen.*

Weil (nach **17**, a) der Obergurt stets Druck, der Untergurt stets Zug hat, so müssen die zugehörigen Einflußflächen für O_3 und U_2 durchweg *einerlei Vorzeichen* zeigen. Den eigentlichen Grund hierfür bildet die Lage des Momentenpunktes *innerhalb* der Stützen. Denn weil die Grenzlinien einer Einflußfläche sich auf der Momentenpunkt-Lotrechten schneiden müssen, so kann die Fläche selbst entweder nur positiv oder negativ ausfallen (Fig. 61).

Für die Wandstäbe liegt der Momentenpunkt i *in der Regel außerhalb* der Stützen, woraus folgt, daß die Einflußfläche für eine Wandstabkraft *in der Regel eine Lastscheide* besitzt (**3**). Ehe man die Einflußfläche für D_2 zeichnet, hat man festzustellen, *welchen Einfluß A und B auf den Sinn der Strebenkraft haben.*

So lange die Einzellast $P = 1$ rechts vom Querträgerfelde ef liegt, betrachten wir den linken Trägerteil mit der Stützenkraft A. In Bezug auf i hat A negatives, die Schnittkraft D_2 aber positives Moment. D_2 *fällt danach positiv aus, so lange die Einzellast rechts vom Felde bleibt.* Wandert die Einzellast links vom Felde, so wird der rechte Trägerteil mit der Stützenkraft B betrachtet und sowohl D_2 als auch B erzeugen in Bezug auf i *ein Moment gleichen Sinnes* (positiv). Die Strebenkraft ist danach negativ für den Lauf der Einzellast links vom Felde. Damit sind die Lagen der Grenzlinien $a_i b_i'$ und $b_i a_i'$ gegeben und auch die Einflußlinie $a_i e' f' b_i$ steht nunmehr fest, *weil sie innerhalb des Feldes eine Gerade sein muß* (**4**).

Auch die Einflußlinie für O_3 (Fig. 59) muß innerhalb des Feldes ef geradlinig verlaufen, weil der zugeordnete Momentenpunkt 3 *nicht* in einer Querträger-Lotrechten liegt. Dagegen bedarf die Dreiecks-Einflußfläche für U_2 keiner Abänderung im Felde, weil der zugeordnete Momentenpunkt 2 in eine Querträger-Lotrechte fällt.

Über die *notwendige Nachprüfung* der Einflußlinien ist folgendes zu sagen. Im vorliegenden Beispiele wurden zuerst die Strecken $bb' = S''$ aufgetragen, wobei S'' der Reihe nach O_3'', U_2'' und D_2'' vorstellt. Dadurch

waren (in den Fig. 59—61) die *den Einfluß von B veranschaulichenden Grenzlinien* $b'a$ gegeben, gleichzeitig aber auch die Grenzlinien ab', weil beide sich auf der Momentenpunkt-Lotrechten (also auf der $3—3'$, $2—e'$ und $i—i'$) schneiden. Die erhaltenen Strecken $aa' = S'$ konnten jetzt nachgeprüft werden, da sie den entsprechenden Seiten des zweiten (mit $A = 1$ gezeichneten) CULMANN'schen Kraftvierecks gleich sein müssen.

Wenn im Schnittfelde Obergurt und Untergurt parallel laufen, kann zwar der Momentenpunkt i zur Nachprüfung nicht herangezogen werden. Es genügt aber zu wissen, daß dann auch die beiden Grenzlinien der Einflußfläche eines Wandstabes parallel laufen. Liegt der Momentenpunkt unbequem, außerhalb des Brettes, so empfiehlt es sich, die *richtige Lage der Lastscheide* nachzuprüfen, nach einem Verfahren, das jetzt gezeigt werden soll.

c. Die Lage der Lastscheide im Schnittfelde (Fig. 64). Der Satz von der Lastscheide lautet:

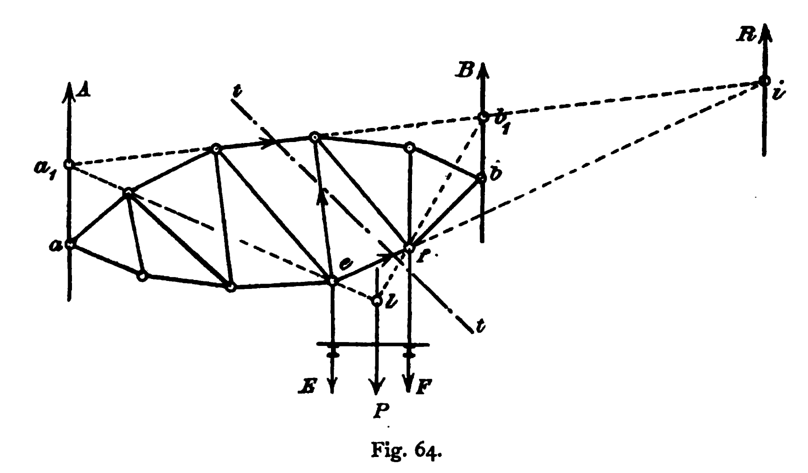


Fig. 64.

Verlängere im Schnittfelde die Richtung desjenigen Gurtes, der nicht Lastgurt ist, bis sie die Stützen-Lotrechten schneidet und ziehe von den beiden Schnittpunkten je eine Gerade durch die betreffenden Knoten im Felde des Lastgurtes. Dann treffen sich die beiden Geraden auf der Lastscheiden-Lotrechten.

Mit Hilfe dieses Satzes ist in den Fig. 58 und 61 die Lage der Lastscheide n der D_2-Fläche nachgeprüft worden. Die Verlängerung des U_2-Stabes gab die Schnittpunkte a_1 und b_1. Die Verlängerung der beiden Geraden $a_1—2$ und $b_1—4$ trafen im Punkte l zusammen. Auf

der durch l gelegten Lotrechten mußte also der Punkt n der Lastscheide liegen.

Der Beweis für den Satz ergibt sich aus folgender Betrachtung: Die *wandernde Einzellast P liege in der Lastscheide ll.* Ist deren Lage richtig angegeben, so muß im Lastpunkte die Einflußgröße verschwinden (**3**), d. h. die geschnittene Wandstabkraft D muß Null werden. Um zu erkennen, daß bei der bezeichneten Lage von P die Stabkraft D wirklich verschwindet, zerlege man zuerst P in zwei Seitenkräfte E und F, von denen eine im Knoten e, die andere im Knoten f des geschnittenen Lastgurtes angreift. Dann kann man das Viereck a_1, b_1, 2, 4 als ein *Seileck* auffassen, in dessen Knoten die äußern Kräfte A und B, sowie E und F wirken. Die Mittelkraft R aller auf einen der beiden Trägerteile links oder rechts vom Schnitte wirkenden äußern Kräfte geht aber durch den Schnittpunkt der betreffenden Seileckseiten. Diese fallen zusammen mit den Gurtstabrichtungen O und U, woraus folgt, daß die Mittelkraft R durch den der Stabkraft D zugeordneten Momentenpunkt i verlaufen muß.

Das Moment von R ist demnach gleich Null, also muß auch D verschwinden. Damit ist bewiesen, daß P wirklich in der Lastscheide liegt, wenn diese nach obigem Satze gezeichnet wird.

19. Die Grenzwerte der Gurtstabkräfte.

a. Vergleich der Berechnungsarten. Jeder Grenzwert setzt sich aus zwei Teilen zusammen, von denen der eine aus dem *Eigengewicht* und der andere aus der *Verkehrslast* herrührt. Es empfiehlt sich, jeden der beiden Teile gesondert für sich zu bestimmen, einerseits schon deshalb, weil es aus den (unter I. **12**) angegebenen Gründen ratsam ist, das *Verhältnis* der Spannkräfte aus dem Eigengewicht zu denjenigen aus der Verkehrslast festzustellen, um danach die *zulässige Spannung* (I. **7**) zweckmäßig wählen zu können. Anderseits ist das Berechnungsverfahren für ständige und veränderliche Belastung im allgemeinen nicht gleich. Es wird sich beim vorliegenden Vergleich also wesentlich um die Berechnung der durch die Verkehrslast erzeugten Gurtstabkräfte handeln, denn für die Bestimmung der Stabkräfte aus dem Eigengewicht gibt es kein einfacheres Verfahren, als das *Zeichnen eines Kräfteplanes* (I. **69**, **70**).

Wird bei der Berechnung eine *gleichmäßig verteilte stetige* Verkehrslast zugrunde gelegt, so tritt der Grenzwert einer Gurtstabkraft stets bei ungeteilter, sogenannter *voller* (über die ganze Stützweite reichender) Belastung ein. Verteilt man demnach, wie es unter **16**, c beschrieben wurde, die volle Belastung auf die einzelnen Gurtknoten, so erhält man die gesuchten Grenzwerte, wie bei der Eigengewichtsbelastung, am ein-

fachsten auch aus einem Kräfteplane. Wenn man will, kann man dabei die Knotenlasten für Eigengewicht und für die gleichmäßige Verkehrslast zusammenzählen. Dann braucht man für die Berechnung nur einen einzigen Kräfteplan. Aber auch in diesem Falle empfiehlt es sich, für jede der beiden Lastarten einen besondern Kräfteplan zu zeichnen, um für jeden Stab das Verhältnis seiner Spannung aus dem Eigengewicht zur Spannung aus der Verkehrslast erhalten zu können.

Für die Berechnung der Grenzwerte aus dem Eigengewicht oder einer gleichmäßigen Volllast ist das Zeichnen eines Kräfteplanes als das geeignetste Verfahren bezeichnet worden. Somit bleibt nur noch zu entscheiden, welchem Verfahren der Vorzug zu geben sein wird, wenn der Berechnung *ein Lastenzug* zugrunde gelegt werden soll, d. h. ob es geraten ist, die Grenzwerte *mit Hilfe von Einflußlinien* zu bestimmen, oder ob es mehr zu empfehlen ist, sie auf der Grundlage der Gleichung

$$S = \frac{M}{r}$$

aus den Grenzwerten der Momente der äußern Kräfte darzustellen. Verfasser gibt hier der letztgenannten Berechnungsart den Vorzug, indem er sich auf die Ausführungen des § 2 stützt, worin die Grenzwerte der Momente unmittelbar dargestellt worden sind, nachdem vorher die verschiedenen *gefährlichsten Lastlagen*, nach bestimmten (aus der Gestalt der Dreiecks- und Vierecks-Einflußfläche abgeleiteten) Regeln aufgefunden worden waren.

b. Das allgemeine graphische Momentenverfahren. Wir setzen voraus, daß für einen beliebigen Vieleckträger die Grenzwerte der Momente (nach **11**—**13**) bestimmt worden sind, wobei als Momentenpunkte die Gurtknoten gedient haben. Dann sind damit (nach Gl. 17) aus

$$\frac{S}{H} = \frac{\eta}{r}$$

sämtliche Grenzwerte S der Stabkräfte gegeben, entweder durch Rechnung oder, wie (unter **17**, a) in der Fig. 52 veranschaulicht, graphisch.

Die gegebene graphische Ermittelung läßt sich in der Regel noch vereinfachen, weil meistens die *Knoten-* oder *Feldweiten a des Trägers gleich groß* sind. Man kann in solchen Fällen, um unnötige Parallelen zu vermeiden und dabei die Genauigkeit der Ergebnisse zu vergrößern, das in entsprechend großem Maßstabe gezeichnete *Trägernetz* zur Aufnahme der graphischen Darstellung benutzen. Wählt man den *Polabstand*

$H = \varepsilon a$, worin ε eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so geht die Gl. (17) in

$$S = \frac{\varepsilon \cdot a \cdot \eta}{r}$$

über.

Das Verhältnis $\frac{a}{r}$ läßt sich — wie es auch schon unter 17, c geschehen ist — bequemer ausdrücken, wenn man die in einer Knoten-Lotrechten gemessene Höhe h eines Dreiecks der Trägerfigur einführt und außerdem den Winkel der betrachteten Gurtstabachse mit der Wagerechten durch β bezeichnet (Fig. 65). Mit Bezug auf die Fig. 65 erhält man dann

$$a = s \cdot \cos\beta$$
$$r = h \cdot \cos\beta,$$

wenn s die Stablänge des geschnittenen Gurtstabes ist. Daraus folgt

$$S = \frac{\varepsilon \cdot s \cdot \eta}{h}$$

oder

$$\frac{S}{s} = \frac{\varepsilon\eta}{h}; \tag{26}$$

s und h sind im Trägernetz, η ist in der Momentenfläche gegeben; ε ist passend zu wählen, wenn angängig gleich 1.

Daraus folgt die in der Fig. 65 eingetragene Darstellung der Grenzwerte für O_5, U_6 und O_7: In den beiden Feldern der Knotenweite a ist auf der betreffenden Knoten-Lotrechten die zugehörige Strecke $\varepsilon\eta$ aufzutragen und durch deren Endpunkt eine Parallele zum betrachteten Stabe zu zeichnen. Dadurch wird obige Gleichung (26) graphisch erfüllt, so daß *die rot gezeichnete Strecke der Parallelen die gesuchte Gurtstabkraft* vorstellt.

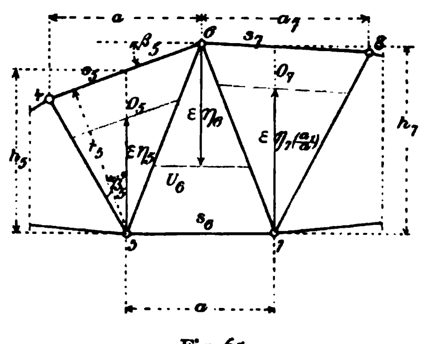


Fig. 65.

In denjenigen Dreiecksfeldern, deren Weite nicht gleich a ist, muß — wie ersichtlich ist — die lotrechte Strecke $\varepsilon\eta$ entsprechend vergrößert oder verkleinert aufgetragen werden, je nachdem die betrachtete Weite größer oder kleiner als a ist. Deshalb ist in der Fig. 65 die Gurtstabkraft O_7 mit Hilfe einer Strecke $\varepsilon\eta_7\left(\frac{a_7}{a}\right)$ gezeichnet worden.

c. Das Momentenverfahren von ZIMMERMANN. Bei diesem Verfahren wird irgend ein Moment M im betrachteten Trägerteile durch die *Querkraft* Q ersetzt. Dann muß die Querkraft, als einzige äußere Kraft, mit den drei Schnittkräften im Gleichgewichte sein. Gelingt es also, das zugehörige Kraftviereck zu zeichnen, so sind damit die gesuchten Stabpräfte gefunden. Zu diesem Zwecke *ersetze man die Querkraft durch zwei ihr gleichwertige und parallele äußere Kräfte, von denen die eine im Obergurtknoten, die andere im Untergurtknoten des Schnittfeldes angreift* (Fig. 66).

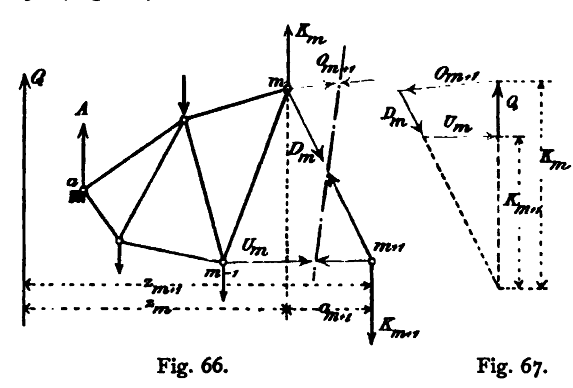


Fig. 66. Fig. 67.

Diese beiden Kräfte K_m und K_{m+1} sind durch folgende Bedingungen gegeben:

$$\begin{aligned} Q &= K_m - K_{m+1} \\ Q z_m &= K_{m+1} \cdot a_{m+1} = M_m \\ Q z_{m+1} &= K_m \cdot a_{m+1} \quad = M_{m+1}, \end{aligned} \tag{27}$$

wenn a_{m+1} die Knotenweite im Schnittfelde und z_m, z_{m+1} die wagrechten Abstände zwischen Q und den betreffenden Gurtknoten bezeichnen. M_m und M_{m+1} bedeuten — nach unserer gewohnten Bezeichnungsweise — das statische Moment der äußern Kräfte des betrachteten (linken) Trägerteils in Bezug auf die den geschnittenen Gurtstäben gegenüberliegenden Knoten.

Die Auflösung der Gleichungen (27) gibt:

$$K_m = \frac{M_{m+1}}{a_{m+1}} \tag{28}$$

$$K_{m+1} = \frac{M_m}{a_{m+1}}.$$

Für den Fall überall gleich großer Knotenweiten a, der hier allein betrachtet werden soll, und für Polabstand $H = \varepsilon \cdot a$ erhält man aus

$$M = H\eta = \varepsilon \cdot a \cdot \eta ,$$

die beiden gesuchten Ersatzkräfte mit

$$K_m = \varepsilon \cdot \eta_{m+1}$$
$$K_{m+1} = \varepsilon \cdot \eta_m .$$

ε ist (nach vorigem) eine beliebige ganze Zahl, die unter Umständen gleich 1 gesetzt werden kann; die Werte von η sind aus der gegebenen Momentenfläche zu entnehmen.

Es wird jetzt nur noch zu zeigen sein, wie man mit Hilfe der aus der Momentenfläche zu erhaltenden Strecken der Ersatzkräfte K das erwähnte *Kraftviereck* zeichnen kann.

Betrachte man zuerst den Einfluß jeder Ersatzkraft auf die Schnittkräfte für sich. Weil K_m durch den, der Stabkraft U_m zugeordneten Momentenpunkt m verläuft, so ist U_m unter dem alleinigen Einflusse von K_m gleich Null. K_m ist demnach mit O_{m+1} und einem Teile von D_m im Gleichgewicht: das entsprechende Kraftdreieck ist in der Fig. 67 dargestellt. Ebenso ist K_{m+1} mit U_m und einem Teile von D_m im Gleichgewicht, weil O_{m+1} unter dem alleinigen Einflusse von K_{m+1} gleich Null sein muß. Das entsprechende Kraftdreieck ist ebenfalls in der Fig. 67 eingetragen und zwar so, daß jetzt die Querkraft $Q = K_m - K_{m+1}$ mit den Stabkräften O_{m+1}, U_m und D_m ein geschlossenes Viereck bildet, worin D_m den Unterschied der beiden Einflüsse von K_m und K_{m+1} vorstellt.

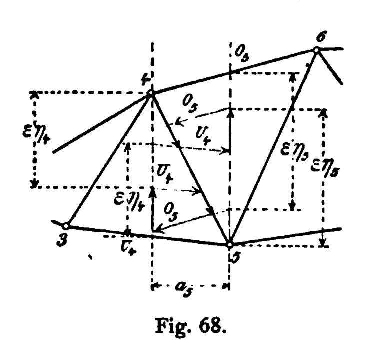


Fig. 68.

In einem gegebenen Falle empfiehlt es sich, das obige Kraftviereck in das betreffende Dreiecksfeld des Trägerbildes einzutragen, wie das in der Fig. 68 in zweierlei Art geschehen ist. Dabei sind die in der vorher darzustellenden Momentenfläche enthaltenen Strecken $\varepsilon\eta$ entweder von *unten* her oder von *oben* aus aufzutragen.

Das Verfahren läuft — soweit die Grenzwerte der Gurtkräfte dadurch bestimmt werden — ersichtlich auf das bereits behandelte allgemeine Momentenverfahren hinaus. Jedoch besitzt es immerhin den Vorzug, daß nebenher (für den betrachteten Belastungsfall) auch die *Größe der Wandstabkraft* mit bestimmt ist. Erhebliche Bedeutung hat dieser Vorzug aber nicht, weil es praktisch selten darauf ankommt, eine Wandstabkraft für eine Vollbelastung oder für irgend eine bei der Bestimmung der Grenzwerte von Gurtkräften maßgebende gefährlichste Lage eines Lastenzugs

darzustellen, sondern *meist nur für diejenige Teilbelastung, die in dem betrachteten Wandstabe den Grenzwert der Spannkraft hervorruft.* Verfasser empfiehlt deshalb die Anwendung des Verfahrens von ZIMMERMANN wohl für den vorliegenden Fall, nicht aber für die Darstellung von Grenzwerten der Wandstabkräfte. Diese lassen sich, wie weiterhin näher erläutert werden soll, auf einfacheren Wegen berechnen.

20. Einfluß der Trägergestalt auf den Spannungswechsel der Wandstäbe.

a. Spannungswechsel und Gegenfachwerk. Während in den Gurten der einfachen Balkenfachwerke (ohne Auslegerenden) sowohl Eigengewicht als auch Verkehrslast *einerlei Art* von Spannung erzeugt, erfahren die meisten Stäbe der Wand in der Regel einen *Spannungswechsel*, wenn dieser nicht zufällig oder durch besondere konstruktive Mittel verhindert wird.

Ein Spannungswechsel wird in den Wandstäben dann nicht eintreten, wenn das Eigengewicht des Trägers im Vergleich mit seiner Verkehrslast groß ist. In diesem Falle ist es möglich, daß in jedem Wandstabe die durch das Eigengewicht darin erzeugte Spannkraft — sie sei positiv oder negativ — *größer* ausfällt, als die in dem Stabe unter dem Einflusse der Verkehrslast entstehende Spannkraft entgegengesetzten Vorzeichens.

Es sei z. B. die Spannkraft E aus dem Eigengewichte in einem der Wandstäbe gleich $+ 100$ t und die von der Verkehrslast herrührenden größten Spannkräfte desselben Stabes seien

für linksseitige Teilbelastung $V_l = + 110$ t
- rechts - - $V_r = - 90$ t.

Dann erhält man für die *Grenzwerte* der Stabkraft aus der *Volllast*:

obere Grenze $E + V_l = + 210$ t
untere - $E - V_r = + 10$ t.

Ein Spannungswechsel würde in diesem Stabe also nicht eintreten.

So gibt es unter ähnlichen Belastungsverhältnissen viele Träger, deren Wandstäbe an keiner Stelle einen Spannungswechsel erfahren. Bei Trägern kleiner Stützweite überwiegt aber meist der Einfluß der Verkehrslast, so daß ein Spannungswechsel in deren Wand nur durch besondere konstruktive Mittel, deren Beschreibung weiterhin gegeben wird, verhindert werden kann.

Warum man einen Spannungswechsel der Konstruktionsstäbe zu vermeiden sucht, wurde bereits (unter I. **6**, **7** und **12**) ausführlich dargelegt. Das Wesentliche des Gesagten läßt sich in kurzen Sätzen wiedergeben:

Ein Spannungswechsel führt einen Konstruktionsstab eher zum Bruche, als wenn der Stab — bei gleich hohen Grenzwerten der Stabkraft — entweder bloß Zug oder bloß Druck erleidet.

Ein Konstruktionsstab, der keinen Spannungswechsel erleidet, bricht selbst bei vielen Millionen von Belastungswechseln nicht, falls dabei der Grenzwert der Stabkraft unter der sog. Elastizitätsgrenze bleibt.

Danach wird heute die Frage, *ob die Widerstandsfähigkeit eines Konstruktionsstabes unter sonst gleichen Umständen kleiner oder größer ist, je nachdem der Stab Spannungswechsel erfährt oder nicht*, von der Mehrzahl der Fachmänner bejaht.

Das älteste Mittel zur Vermeidung von Spannungswechseln in der Trägerwand war die Anwendung des sog. *Gegenfachwerks.* Bei seiner Einführung lagen die (unter I. 6) mitgeteilten Ergebnisse von Dauerversuchen noch nicht vor. Man wollte damals die *gedrückten* (aus *Formeisen* gebildeten) Wandstäbe überhaupt ganz ausschalten und nur *gezogene* Stäbe zulassen, einerseits weil Druckstäbe, unter sonst gleichen Umständen, mehr Querschnittsfläche erfordern, als Zugstäbe und anderseits, weil diese sich aus *Flacheisen* herstellen und deshalb bequemer in den Knoten anschließen lassen, als jene.

Gegenfachwerk ist Ständerfachwerk, das in allen Feldern, wo ein Spannungswechsel der Strebe zu erwarten steht, durch eine diese kreuzende Gegenstrebe zu ergänzen ist (Fig. 69).

Die Gegenstreben sind punktiert eingezeichnet. Die übrigen Streben werden *Haupt*streben genannt und derart gerichtet, daß sie unter dem alleinigen Einflusse des Eigengewichtes bloß *Zug*spannungen erfahren: *Bei symmetrisch angeordneten Trägern fallen sie in Schnittfeldern der linken und steigen in Feldern der rechten Trägerhälfte.* Das ist in jedem besondern Falle mit Hilfe des in der Gl. (24) gegebenen Kennzeichens leicht zu entscheiden.

Fig. 69.

Unter den erwähnten Belastungssverhältnissen würden die Hauptstreben beim Übergang der Verkehrslast von einer auf die andere Seite eines Feldes in einer gewissen Reihe von Feldern einen Spannungswechsel erleiden, wenn nicht in den betreffenden Feldern Gegenstreben eingezogen wären. Wie dabei die Gegenstreben wirken, soll jetzt an dem Beispiele eines *Parallelträgers* klar gemacht werden (Fig. 69).

In den beiden Endfeldern kann ein Spannungswechsel nie eintreten,

weil die Stabkräfte D_0 und D_7 sowohl für das Eigengewicht als auch für die Verkehrslast des Trägers positiv ausfallen. In allen übrigen Feldern kann Spannnungswechsel vorkommen, wenn nicht etwa — wie vorerläutert — der überwiegende Einfluß des Eigengewichtes dieses überall, oder doch in einzelnen Feldern, verhindert. Am ungünstigsten stehen in dieser Beziehung die mittleren Trägerfelder da. In diesen sind die Wandstabkräfte aus dem Eigengewicht nämlich am kleinsten, weil (nach Gl. 21)

$$D = \frac{Q}{\cos \alpha}$$

und

$$V = Q$$

anzuschreiben ist. Die *Querkraft* Q für das Eigengewicht geht aber in der Trägermitte durch Null (I. **67**).

Wir nehmen an, daß in den vier mittleren Feldern ohne Einziehen einer Gegenstrebe Spannungswechsel entstände. Eine stetig verteilte Verkehrslast rücke von links her (auf oben liegender Fahrbahn) über den Träger vor. Dadurch erhalten die Hauptstreben des 1. und 2. Feldes Druck, der aber an Größe kleiner ist, als ihr Zug, den sie aus dem Eigengewicht erhalten. Sie bleiben also *gezogen*. Der Spannungswechsel beginnt erst im 3. Felde, wenn die Verkehrslast so weit vorgerückt ist, daß sie in der Hauptstrebe den Zug aus dem Eigengewicht in Druck umwandelt. In diesem Augenblicke biegt sich die Hauptstrebe aus, weil sie ihres *Flacheisen*-Querschnittes wegen Druck nicht aufnehmen kann und dadurch veranlaßt sie *die fallende Gegenstrebe des rechten unbelasteten Trägerteiles in Tätigkeit zu treten*, d. h. den aus der *Voll*belastung herrührenden *Zug* aufzunehmen und somit das Gleichgewicht zwischen äußeren und inneren Kräften aufrecht zu erhalten.

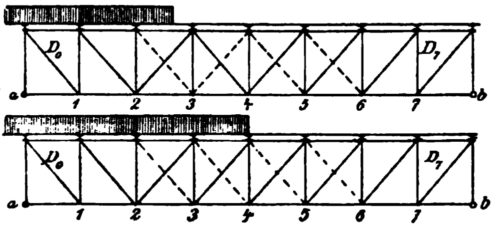


Fig. 70.

Der gleiche Vorgang spielt sich bei entsprechender Lage der Verkehrslast im 4. Felde ab (Fig. 70). Ist diese auf der Mitte des Trägers angelangt, so sind auf der rechten Trägerseite alle Gegenstreben spannungslos, weil alle Hauptstreben aus der Vollbelastung nur Zug erfahren usw.

Es ist notwendig, schließlich noch hervorzuheben, daß das Gegenfachwerk im Laufe der Zeit seine früher so bedeutsame Rolle im Konstruktionswesen ganz ausgespielt hat. Wenigstens gilt dies heute für Neubauten des Ingenieurbauwesens fast ohne Einschränkung. Die Gründe hierfür sind im wesentlichen folgende:

Die in der Theorie vorausgesetzte Wirkung der Gegenstreben wird in der Praxis nur unvollkommen erreicht. Die Gegenstreben sollten *spannungslos* eingesetzt werden, was praktisch unmöglich ist. Bei unrichtigen Berechnungsannahmen für Eigengewicht und Verkehrslast, oder auch beim Eintritt einer nicht vorausgesehenen Vergrößerung der Verkehrslast über die ursprünglichen Annahmen hinaus, können die Hauptstreben in Feldern, in denen gemäß der ersten Berechnung Gegenstreben nicht eingezogen waren, nachträglich *Druck erfahren*, den sie wegen ihres Flacheisen-Querschnittes nicht vertragen. Bei gewissen Laststellungen können beide Streben eines Feldes *gleichzeitig gezogen* werden. In solchen Fällen ist die Berechnungsaufgabe *statisch unbestimmt.* Alle diese Umstände haben dazu beigetragen, das Gegenstreben-Fachwerk unbeliebt zu machen, so daß gegenwärtig die *einteiligen Systeme ohne Gegenstreben* bevorzugt werden, deren Streben also für Spannungswechsel *zug-* und *druck-* oder *knickfest* auszubilden sind[1].

b. Einfluß besonderer Gurtformen. In den beiden *Endfeldern* eines einfachen Balkenträgers (ohne Auslegerenden) kann niemals Spannungswechsel eintreten, weil dort die *Querkraft* entweder nur positiv oder negativ ist. Weiter wurde im vorigen nachgewiesen, wie bei *Parallel*trägern im allgemeinen in einigen mittleren Feldern Spannungswechsel stattfindet. Nachfolgend sollen nun noch zwei Träger besprochen werden, die in einem gewissen Gegensatze zueinander stehen: der *Parabel*träger und der SCHWEDLER-Träger[2]. Während nämlich der Parabelträger in allen seinen Feldern Spannungswechsel erleiden muß, ausgenommen die Endfelder, ermöglicht es die theoretische Gestalt der SCHWEDLER-Gurte jeden Spannungswechsel der Wand auszuschließen.

1. *Der Parabelträger* (**16**, a). Für $D_m = 0$ galt nach der Gl. (25) die Bedingung

$$\frac{h_m}{h_{m+1}} = \frac{\eta_m}{\eta_{m+1}}.$$

[1] MEHRTENS, Der deutsche Brückenbau im 19. Jahrhundert. S. 15—16. —

[2] SCHWEDLER (1823—1895), der Erfinder des nach ihm genannten Trägers, war einer der größten Konstrukteure seiner Zeit. Er war 38 Jahre lang im preußischen Ministerium der öffentl. Arbeiten tätig, von 1868 ab als vortragender Rat. — Gedächtnisrede von SARRAZIN. Zeitschr. für Bauwesen 1895.

Weil nun die Momentenfläche eines einfachen Trägers für *gleichmäßig stetige Vollbelastung* von einer *Parabel*-Seillinie begrenzt wird (I. **67**, a) so folgt, daß alle *Streben*stabkräfte gleich Null werden, wenn die in den Knotenlotrechten gemessenen Trägerhöhen h einer Parabelgleichung entsprechen und wenn außerdem der Parabelträger voll und gleichmäßig belastet ist.

Weiter folgt, daß das Gesagte nur für *Ständer*fachwerk gelten kann, weil es unmöglich ist, in einem praktischen Falle beim Strebenfachwerk (Fig. 71) eine Momentenfläche zu zeichnen, in welcher *alle Endpunkte der Ordinaten* η *in einer Parabel* liegen. Das muß aber der Fall sein, wenn die Bedingung der Gl. (25) erfüllt werden soll. Nur beim Ständerfachwerk ist dies möglich, weil dort kein Knoten (oder Momentenpunkt) *zwischen* zwei Querträger des Lastgurtes fällt, während beim Strebenfachwerk die Knoten eines der beiden Gurte *zwischen* den Knotenlotrechten des Lastgurtes liegen, so daß die Endpunkte von *drei aufeinander folgenden Ordinaten* η *der zugehörigen Momentenfläche immer in eine Gerade fallen müssen.*

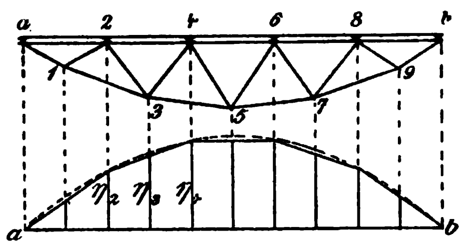


Fig. 71.

Ein Parabelträger kann in seiner allgemeinen Gestalt (Fig. 72) zwei gebrochene Gurte erhalten, wobei die Knoten des einen in einer beliebigen Krümmung liegen dürfen, wenn die Krümmung des andern Gurtes derart bestimmt wird, daß zwischen beiden alle Trägerhöhen der obigen Gl. (25) entsprechen.

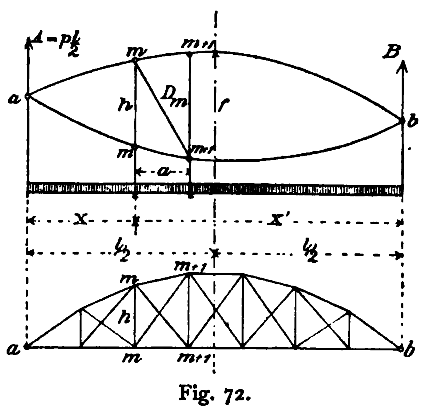


Fig. 72.

Ist l die Stützweite, h eine beliebige Trägerhöhe in der Entfernung x von der linken und x' von der rechten Stütze, f die (von vorneherein festzusetzende) Höhe *in der Trägermitte*, so läßt sich die (zu einer Vollbelastung p für die Einheit der Stützweite gehörige) Parabelgleichung wie folgt ableiten:

Das Moment für den Gurtknoten m in der Entfernung x von der Stütze a ist mit

$$M = Ax - \frac{px^2}{2}$$

anzuschreiben, worin

$$A = \frac{pl}{2} = \frac{p(x+x')}{2}$$

ist. Das gibt

$$M = \frac{pxx'}{2}.$$

Soll nun

$$\frac{M}{h} = C$$

eine Unveränderliche sein, so ist auch

$$\frac{xx'}{h} = C \tag{29}$$

zu setzen.

Aus der Bedingung

$$x = x' = \frac{l}{2}$$

und

$$h = f$$

folgt die Unveränderliche C mit

$$C = \frac{l^2}{4f}.$$

Wird dies mit der Gl. (29) verbunden, so folgt die *Parabelgleichung*

$$h = \frac{4fx(l-x)}{l^2}. \tag{30}$$

Eine Wandstabkraft berechnet sich nach Gl. (23) aus

$$D = \left(\frac{c}{b}\right)\frac{Q}{\cos\alpha}.$$

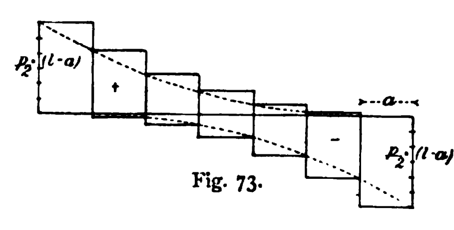


Fig. 73.

Darin ist $\frac{c}{b\cos\alpha}$ für jeden Wandstab ein positiver Festwert, deshalb ist das Vorzeichen von D allein von dem Vorzeichen der Querkraft Q abhängig. Die Querkraft *aus dem Eigengewicht* kommt nicht in Betracht, weil die Stabkraft D unter dem alleinigen Einflusse des *als gleichmäßige Vollbelastung anzusehenden* Eigengewichtes verschwindet. Die durch die Verkehrslast erzeugte Querkraft (Fig. 73)

ist aber, je nach ihrer Lage, in jedem Felde sowohl positiv als negativ. Daraus folgt der Satz:

Jedes Wandfeld eines Parabelträgers erleidet unter dem Einflusse der Verkehrslast einen Spannungswechsel.

Es müßte also, falls Spannungswechsel vermieden werden soll, *in jedem Felde* eine Gegenstrebe eingelegt werden (Fig. 72).

2. *Der Schwedlerträger* (Fig. 74 u. 75). *Der Schwedlerträger zeigt Ständerfachwerk und seine Gurte sind derart gestaltet, daß bei jeder möglichen Lage der Verkehrslast in keiner Strebe ein Spannungswechsel eintreten kann.*

Fig. 74.

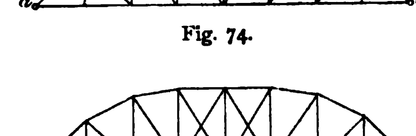


Fig. 75.

Die Gurtform muß sich danach aus der Bedingung

$$\max. -D = 0$$

ergeben. Nach Gl. (24) tritt aber in einer *fallenden* Strebe ein Druck ein, wenn

$$\frac{M_m}{h_m} > \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}}.$$

Der Druck wird gleich Null, wenn

$$\frac{M_m}{h_m} = \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}}$$

ist, oder wenn

$$\frac{h_{m+1}}{h_m} = \frac{M_{m+1}}{M_m}$$

gemacht wird.

Dafür kann

$$\frac{h_{m+1}}{h_m} = \frac{\eta_{m+1}}{\eta_m} \tag{31}$$

gesetzt werden, wenn η allgemein eine Höhe der Momentenfläche bedeutet, die für die ungünstigste Laststellung ermittelt worden ist. Für gegebene Belastungen und Stützweite wird der Schwedlerträger *rechnerisch*, mit Hilfe der Gl. (31), wie folgt dargestellt: Man bestimme sämtliche η der Momentenfläche, wobei die Verkehrslast für jedes Feld derart einzustellen ist, daß dadurch die Strebe den größtmöglichsten *Druck* erfährt (**21**, c). Damit ist für jedes Feld das Verhältnis der Ständerhöhen festgelegt. Nimmt man also die Gestalt eines Gurtes und

dazu die Höhe in der Trägermitte passend an, so sind damit alle andern Ständerhöhen und Gurtrichtungen gegeben.

Graphisch lassen sich die Gurtrichtungen sehr bequem mit Hilfe des Momentenverfahrens von ZIMMERMANN (**19**, c) darstellen. Man denke sich in dem Felde, worin eine Gurtrichtung bestimmt werden soll, nur die Gegenstrebe vorhanden. Deren Stabkraft wird dann bei der nämlichen ungünstigsten Stellung der Verkehrslast verschwinden, bei welcher die Stabkraft $+D$ der Hauptstrebe auf Null gesunken ist. Deshalb muß in dem Felde 4—5 der Fig. 76 das geschlossene Viereck aus der Querkraft Q und den drei Schnittkräften O_4, D_4 und U_5 in ein Kraftdreieck übergehen, weil D_4 darin verschwindet. Man trage also (nach ZIMMERMANN) für die erwähnte ungünstigste Laststellung auf den Knotensenkrechten 4 und 5 die zugehörigen Strecken

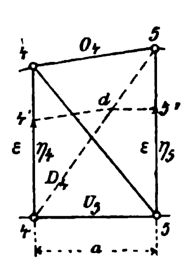


Fig. 76.

$$\varepsilon\eta_4 \quad \text{und} \quad \varepsilon\eta_5$$

auf, wenn a die Feldweite und der Polabstand $H = \varepsilon a$ gesetzt worden ist. Vom Endpunkt 5′ ziehe man eine Parallele zur Untergurtrichtung. Diese treffe die Gegenstrebe in d. Dann muß die Gerade 4′—d der gesuchten Obergurtrichtung parallel sein.

In der Regel werden die aus den gefährlichsten Lastlagen gewonnenen Werte von M von gewissen Knoten ab nach der Trägermitte hin *kleiner*. Deshalb müßten dort auch die Ständerhöhen entsprechend kleiner gemacht werden, was aber eine unschöne Trägergestalt gäbe (Fig. 74). In praktischen Fällen ist deshalb der Schwedlerträger in der Nähe der Trägermitte immer als Parallelträger ausgeführt worden (Fig. 75) wodurch allerdings in den betreffenden Feldern, falls man Spannungswechsel vermeiden will, wieder Gegenstreben notwendig werden.

Den bei der Besprechung des Gegenfachwerks (**20**, a) schon erwähnten Nachteil, daß bei unrichtigen Belastungsannahmen oder nicht vorausgesehener späterer Vergrößerung der Verkehrslast Felder ohne Gegenstreben unvermutet einmal Druck erhalten können, besitzt auch der Schwedlerträger. Rechnet man dazu noch seine unschöne Gestalt, so hat man die Hauptgründe beisammen, die heute einer weitern Verbreitung dieser früher so sehr beliebten Trägerart entgegen stehen.

21. Die Grenzwerte der Wandstabkräfte.

a. Vergleich der Berechnungsarten. Während die Grenzwerte der Gurtstabkräfte bei *Voll*belastung eintreten, und deshalb — wie unter **19** dargelegt worden ist — in einfacher Weise aus einem Kräfteplane

oder nach dem Momentenverfahren bestimmt werden können, erreichen die Wandstabkräfte ihre Grenzwerte bei *Teil*belastung. Mit Ausnahme der Endfelder empfängt in jedem Felde ein Wandstab unter dem Einflusse der Verkehrslast sowohl eine positive als auch eine negative Spannkraft, die in praktischen Fällen, um die Art des Spannungswechsels klar zu legen, *beide* berechnet werden (**20**, a). Dabei Kräftepläne oder eins der beschriebenen Momentenverfahren zu benutzen, wäre sehr zeitraubend, also unzweckmäßig. *Einflußlinien* anzuwenden wäre viel bequemer, aber für alle Trägerformen und Belastungsarten auch nicht immer zu empfehlen, weil es in besonderen Fällen Verfahren gibt, die rascher zum Ziele führen und genauere Ergebnisse ermöglichen.

Die Wahl eines geeigneten Berechnungsverfahrens hängt wesentlich davon ab, einerseits ob es sich dabei um *Parallel*träger oder um Träger mit *gebrochenen* Gurten handelt, und anderseits ob die *gefährlichsten Lastlagen bei der Grundstellung* eintreten, oder ob diese *überschritten* wird (**9**).

Für die Wandstabkräfte von Parallelträgern gelten die Gl. (21 u. 22)

$$D = \pm \frac{Q}{\cos\alpha}$$

und

$$V = \pm Q.$$

Ihre Grenzwerte können daher unmittelbar und bequem aus denjenigen der *Querkräfte* abgeleitet werden, ganz gleich welche Art der Belastung zu Grunde liegt.

Bei Trägern mit einem oder zwei *gebrochenen Gurten* könnte man wohl die Gl. (20)

$$D = \pm \frac{z}{b}\frac{Q}{\cos\alpha}$$

benutzen, wenn nicht das Verhältnis $\frac{z}{b}$ für jedes Feld verschieden groß und dazu auch nicht ohne Kenntnis der jedesmaligen Lage der Querkraft Q zu bestimmen wäre (**17**, b, Fig. 53).

Die Anwendung der Gl. (23)

$$D = \pm \frac{c}{b}\frac{A}{\cos\alpha}$$

setzt voraus, daß im Schnittfelde keine Last liegt, mit andern Worten also, daß die gefährlichste Lastlage *bei der Grundstellung* stattfindet. In diesem Falle wirkt z. B. auf den linken Trägerteil als äußere Kraft allein die Stützenkraft A und diese muß mit den drei Schnittkräften O, U und D oder V ein Kraftviereck bilden. Daraus folgt für jedes

Feld die gesuchte Wandstabkraft. An Stelle der Kraftvierecke kann man in diesem Falle auch einen *Kräfteplan für die Stützenkraft-Einheit* zeichnen, wie das auch bei der Darstellung von Einflußlinien Gebrauch ist (**18**, a). Bezeichnet man dann eine unter dem Einflusse der Stützenkraft-Einheit entstehende Wandstabkraft, wie früher (S. 65)

für $A = 1$ mit D'
- $B = 1$ - D'',

so folgt

$$D = A \cdot D'$$

oder

$$D = B \cdot D'', \qquad (32)$$

Fig. 77.

Fig. 78.

wobei A und B diejenigen Stützenkräfte bedeuten, die *bei der gefährlichsten Grundstellung* entstehen.

Wenn obige Sonderfälle nicht vorliegen, wenn also bei Trägern mit gebrochenen Gurten die gefährlichste Lastlage *unter Überschreitung der Grundstellung* eintritt, gibt es wohl keine einfachere und bequemere Berechnungsart als die *Anwendung von Einflußlinien* (**18**, a).

Die nachfolgenden Beispiele werden das Gesagte im einzelnen weiter erläutern.

b. Parallelträger. In der Fig. 77 ist ein Parallelträger von 21 m Stützweite und 3 m Höhe dargestellt. Er zeigt Strebenfachwerk mit eingeschobenen Hilfsständern, bei 1,75 m Knotenweite. Seine Wandstabkräfte sind zuerst für eine gleichmäßige Verkehrslast von 4,0 t für 1 m Trägerlänge und darauf für den in Fig. 78 angegebenen Lastenzug berechnet worden. Schließlich ist auch noch ein Kräfteplan für die aus dem Eigengewicht herrührenden Stabkräfte (Fig. 80) gezeichnet worden. Dabei wurde — den im Anhange (unter § 11) aufgeführten Erfahrungsformeln entsprechend — das Eigengewicht auf 0,75 t für 1 m Trägerlänge geschätzt, wovon auf den Lastgurt (den Obergurt) $^2/_3$ und der Rest auf den Untergurt verteilt worden ist. Das ergab *abgerundet* für *jeden* Knoten eine Eigenlast von 0,9 t.

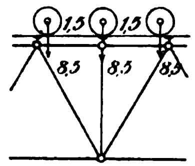


Fig. 79.

1. *Ständer-Stabkräfte.* Aus dem Gleichgewicht eines Ständerknotens im Obergurt folgt, daß jede Ständerkraft der größten vorkommenden Knotenlast gleich sein muß. Danach ergibt sich V wie folgt:

aus dem *Eigengewicht*: $V = -0,9$ t.

- der gleichmäßigen *Verkehrslast*: $V = -1,75 \cdot 4,0 = -7,0$ t

- dem *Lastenzuge* (Fig. 79): $V = -8,5\left(1+2\,\frac{0,25}{1,75}\right) = \text{rund} -11$ t.

Deshalb ist in dem Kräfteplane für das Eigengewicht (Fig. 80), unter Berücksichtigung der durch jeden Ständer auf seinen Untergurtknoten übertragenen Last von 0,9 t, das Gewicht der Untergurtknoten 1 bis 11 mit $2 \cdot 0,9 = 1,8$ t angesetzt worden.

2. *Streben-Stabkräfte aus der gleichmäßigen Verkehrslast.* Die Stützenkraft A ist (nach Gl. (13) unter **14**, b) mit

$$A = +\frac{p(l-a)}{2}$$

anzuschreiben. Das gibt

$$A = \frac{4(21-1,75)}{2} = 38,5 \text{ t}.$$

Mit Hilfe des (in Fig. 37) erläuterten Verfahrens sind danach die größten Querkräfte für die Stützweite $l-a$ dargestellt. Dabei ergab sich für die 11 Felder der Strecke $l-a$ die Teilung der Stützensenkrechten in a' zu

$$\frac{38,5}{11} = 3,5 \text{ t.}$$

Von der Parabel sind nur ihre in die Knotenlotrechten fallenden Punkte ermittelt worden. Die so erhaltenen Parabelordinaten stellen die gesuchten größten Querkräfte *für den betrachteten linken Trägerteil* dar.

Die Division von Q durch $\cos\alpha$ wurde graphisch ausgeführt. Dadurch ergaben sich die in der Fig. 77 *grün* dargestellten Strecken D_1 bis D_{11} der *Streben*stabkräfte. D_{11} wird für die *betrachtete Fahrtrichtung* (von rechts nach links) gleich Null. Für die entgegengesetzte Fahrtrichtung erhält man, bei vorliegender Symmetrie des Trägers und der Lasten, der Größe nach die *nämlichen Werte von Q, jedoch mit umgekehrten Vorzeichen, weil dabei immer der oben betrachtete linke Trägerteil beizubehalten ist.* Wie man danach schließlich die beiden Grenzwerte der Strebenstabkräfte findet, soll für einige der Felder gezeigt werden.

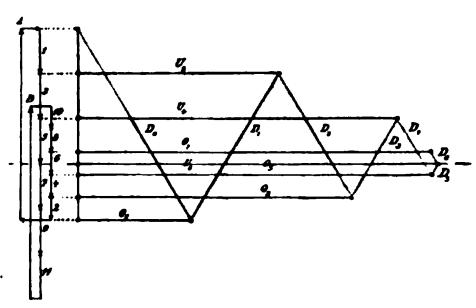


Fig. 80.

Die fallende Strebe D_4 hat bei der *Links*fahrt einen größten *Zug* von etwa 18,3 t, wie aus der Fig. 77 abgegriffen werden kann. Sie erhält ihren größten *Druck* bei der *Rechts*fahrt und dieser ist ebenso groß wie der größte Druck der zum Stabe D_4 *symmetrisch* liegenden Strebe D_7. D_7 ist mit etwa 6,3 t abzugreifen. Aus der *Verkehrslast* erhält also die Strebe D_4 folgende Stabkräfte:

$$\text{max.} + D_4 = + 18,3 \text{ t}$$
$$\text{max.} - D_4 = \text{max.} - D_7 = - 6,3 \text{ t.}$$

Um nun zu erkennen, ob *Spannungswechsel* vorliegt, bestimmen wir zuerst noch die Stabkräfte D_4 aus dem *Eigengewicht.* Aus Fig. 80 ist D_4 mit etwa $+ 2,7$ abzugreifen. Danach ist

obere Grenze: $\text{max.} + D_4 = 18,3 + 2,7 = + 21,0 \text{ t}$
untere - $\text{max.} - D_4 = - 6,3 + 2,7 = - 3,6 \text{ t.}$

In gleicher Weise berechnet sich z. B. D_1: Bei der Linksfahrt ist max. $-D_1 = -37{,}1$; bei der Rechtsfahrt ist $+D_1 = +D_{10} =$ etwa $+0{,}7$ t. Aus dem Eigengewicht erhält D_1 die Stabkraft $-6{,}8$ t. Demnach ist

obere Grenze: max. $-D_1 = -37{,}1 - 6{,}8 = -43{,}9$ t
untere - max. $+D_1 = +\ 0{,}7 - 6{,}8 = -\ 6{,}1$ t.

In der Strebe D_1 findet also *kein* Spannungswechsel statt, sie wird immer nur gedrückt.

3. *Strebenstabkräfte aus dem Lastenzuge.* Die Art der Berechnung unterscheidet sich gegenüber der (unter 2) beschriebenen nur durch die etwas andere Darstellung der größten Querkräfte. Mit Rücksicht auf die ausführlichen früheren Darlegungen (unter **14**) wird es genügen, hier zu sagen, daß in Fig. 78 die Grundstellung die gefährlichste Lastlage ist und danach die größten Werte von Q unmittelbar als Ordinaten der *Stützenkraftlinie* (**9**, a) in den Knotenlotrechten entnommen werden können. Wäre bei einem andern Lastenzuge die Grundstellung nicht die gefährlichste, so würde man (wie unter **9**, b gezeigt worden ist) ebenfalls mit Hilfe der Stützenkraftlinie die größten Werte von Q leicht finden.

Aus den Fig. 78 und 80 erhält man schließlich (unter Beibehaltung der vorigen Eigengewichtszahlen) für die Grenzwerte von D_4 und D_1 das Folgende:

obere Grenze: max. $+D_4 = +23{,}2 + 2{,}7 = +25{,}9$ t
untere - max. $-D_4 = -\ 9{,}6 + 2{,}7 = -\ 6{,}9$ t
obere - max. $-D_1 = -41{,}6 - 6{,}8 = -48{,}4$ t
untere - max. $-D_1 = +\ 1{,}2 - 6{,}8 = -\ 5{,}6$ t.

c. Vieleckträger.

1. *Die Grenzwerte bei der Grundstellung.* Wie (unter a) schon gesagt wurde, wirkt in diesem Belastungsfalle auf den betrachteten Trägerteil allein die *Stützenkraft.* Deren Größe kann also, wie beim Fall des Parallelträgers angegeben, aus der *Stützenkraftlinie* entnommen werden. Um irgend eine Stützenkraft bestimmt bezeichnen zu können, sollen A und B diejenige *Knotennummer als Zeiger* erhalten, die der Querträgerlotrechten, bis zu welcher die zugehörige Grundstellung reicht, entspricht. Danach bedeutet also (mit Bezug auf die Fig. 81) z. B.

> A_6 die Stützenkraft bei *oben*liegender Fahrbahn, wenn die Verkehrslast von der Stützenlotrechten in b aus bis zur Querträgerlotrechten in 6, also bis in ihre Grundstellung, vorgerückt ist.

Ebenso bedeutet z. B.

B_5 die Stützenkraft bei *unten*liegender Fahrbahn, wenn die Verkehrslast von a aus bis zur Lotrechten durch 5 vorgeschritten ist.

Zeichnet man jetzt, wie es in Fig. 82 für den Vieleckträger der Fig. 81 geschehen ist, einen *Kräfteplan für die Stützenkraft-Einheit*, so hat man in Verbindung mit den vorher ermittelten Stützenkräften die Unterlagen zur Berechnung aller Grenzwerte der Wandstabkräfte beisammen. Ehe zur Berechnung geschritten wird, ist über den Kräfteplan in Fig. 82 noch das Folgende zu sagen.

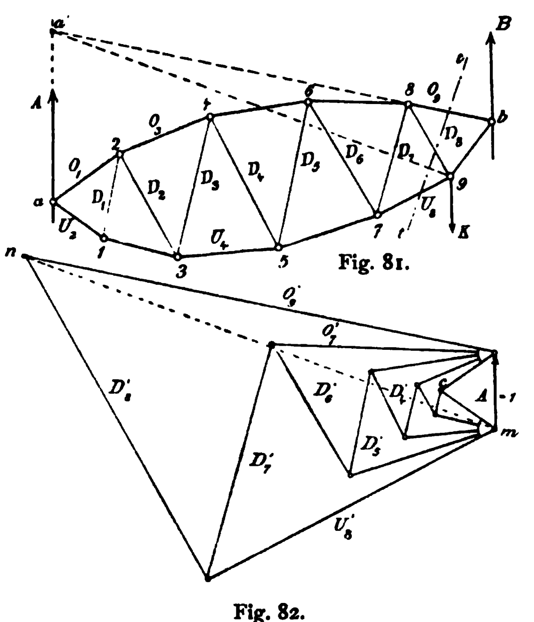


Fig. 81.

Fig. 82.

Um sämtliche unter $A = 1$ entstehenden Wandstabkräfte D' zu erhalten, denkt man sich den letzten Knoten vor der Stütze b durch eine lotrechte Kraft K derart belastet, daß $A = 1$ wird. Bedingung für die Darstellung des Planes ist dabei selbstverständlich, daß links vom gelegten Schnitte tt keine Knotenlast wirkt. Sobald man dann (nach den Regeln in I. **70**, b) die Parallelen zu den Gurtstabrichtungen mit der Strecke $A = 1$ richtig verbunden hat, läßt sich der den Plan *schließende* Parallelenzug der Wandstabrichtungen, der in Fig. 82 *grün* dargestellt ist, leicht einzeichnen. Um den Plan *im gehörigen Maßstab* zu erhalten, empfiehlt es sich, den äußersten Schnittpunkt n des umschließenden Kraftvierecks aus $A = 1$, O'_9, U'_8 und D'_8 nach CULMANN's Verfahren (I. **49** u. **69**) vorher passend festzulegen. Damit erhält man gleichzeitig zum Nachprüfen des Planes einen Festpunkt, insofern, als der von diesem ausgehende (grüne) Parallelenzug im Eckpunkte c des ersten Kraftdreiecks (aus $A = 1$, O'_1 und U'_2) endigen muß.

Wir nehmen jetzt in Fig. 81 *oben*liegende Fahrbahn an. Dann denken wir uns die Werte A_2, A_4, A_6 und A_8 aus einer Stützenkraftlinie

entnommen. Damit haben wir die Grundlagen der Berechnung aller Wandstabkräfte *für die Fahrtrichtung nach links* und die Betrachtung des linken Trägerteils beisammen. Denn es ist z. B. anzuschreiben:

für am Obergurt liegende Bahn

$$\text{max.} + D_2 = A_4 \cdot D_2'; \quad \text{max.} - D_3 = A_4 \cdot D_3'$$
$$\text{max.} + D_4 = A_6 \cdot D_4'; \quad \text{max.} - D_5 = A_6 \cdot D_5'.$$

Bei *symmetrischer Trägergestalt* erhält man den Plan für $B = 1$ als *Spiegelbild* des Planes für $A = 1$, insofern als darin

D_1'' und D_8'
D_2'' - D_7'
D_3'' - D_6'
D_4'' - D_5'

gleiche Stabkräfte erhielten. *Symmetrie vorausgesetzt* erhielte man dann

für am Obergurt liegende Bahn

$$\text{max.} - D_2 = B_2 \cdot D_2'' = A_8 \cdot D_7'$$
$$\text{max.} + D_3 = B_2 \cdot D_3'' = A_8 \cdot D_6'$$
$$\text{max.} - D_4 = B_4 \cdot D_4'' = A_6 \cdot D_5'$$
$$\text{max.} + D_5 = B_4 \cdot D_5'' = A_6 \cdot D_4'.$$

Somit genügt für einen symmetrischen Träger *eine* Stützenkraftlinie für die Linksfahrt und *ein* Kräfteplan für $A = 1$. Bei unsymmetrischen Trägern wäre außerdem ein Plan für $B = 1$ zu zeichnen und, falls etwa auch *unsymmetrisch* angeordnete *Feldweiten* vorlägen, müßte noch eine Stützenkraftlinie für die Rechtsfahrt hinzukommen.

2. *Die Grundstellung wird überschritten.* Dieser Fall tritt bei gleichmäßiger Verkehrslast *immer* ein, denn der Grenzwert einer Wandstabkraft erscheint erst, wenn die Last bis zur *Lastscheide* (**3**) des betreffenden Feldes vorgerückt ist. Liegt dagegen ein Lastenzug vor, so wird die Grundstellung um so eher überschritten, je größer das betreffende Schnittfeld ist und je kleiner Größe und Abstand der an der Spitze des Zuges marschierenden Lasten ausfallen.

In beiden Fällen ist es am bequemsten, die Grenzwerte *mit Hilfe von Einflußlinien* zu berechnen, wie das unter **18** gezeigt worden ist. Jede andere Lösung ist umständlicher, abgesehen von gewissen *Annäherungs*-Rechnungen, die hier aber übergangen werden, weil ihre Anwendung im Hinblick auf ihre ungenauen Ergebnisse nicht empfohlen werden kann. Wie man die Grenzwerte sowohl für gleichmäßige Lasten als auch für einen Lastenzug auf anderm Wege bestimmen

kann, ist aus den Fig. 83—88 zu entnehmen. Die gefährlichste Stellung eines Lastenzuges ist in der Fig. 83 eingezeichnet, so daß z. B. der Obergurt als Lastgurt dient. Kann diese Zugstellung nicht ohne weiteres erkannt werden, so ist sie immer (wie die Grundgestalt der zugehörigen Einflußlinien offenbart) mit Hilfe einer *Dreiecks-Einflußfläche* (**18**) zu

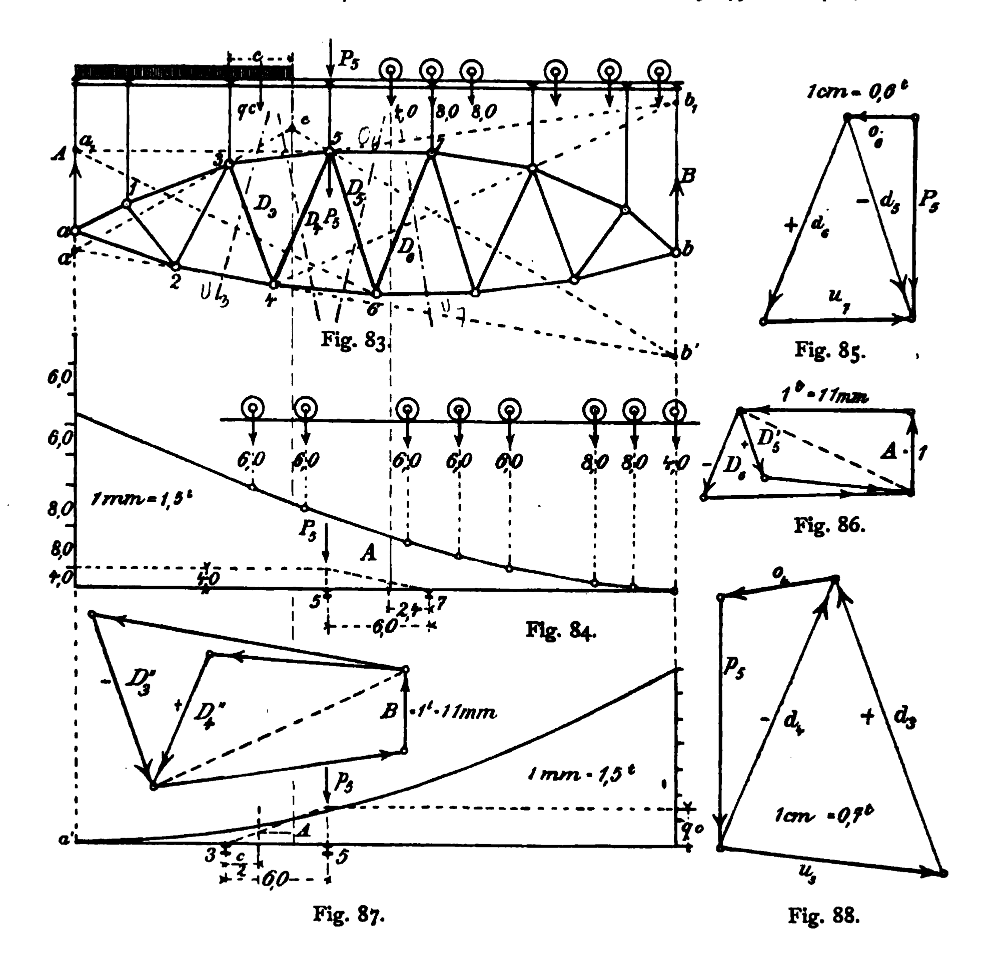


Fig. 83. Fig. 84. Fig. 85. Fig. 86. Fig. 87. Fig. 88.

finden, wobei die gegebenen Regeln (**7**, S. 19) zu beachten sind. Für einen im Felde 5—7 durch den Wandstab D_5 oder D_6 gelegten Schnitt erzeugt der Lastenzug im betrachteten linken Trägerteile eine Querkraft Q, die mit

$$Q = A - P_5$$

anzuschreiben ist, wenn P_5 der von der Mittelkraft aller im Felde

liegender Lasten auf den Querträgerknoten 5 ausgeübte, abwärts gerichtete Druck ist. Das Berechnungsverfahren besteht nun darin, daß man den Einfluß von A und von P_5 auf die gesuchte Stabkraft je besonders ermittelt und die so erhaltenen beiden Werte addiert. Das ist in den Fig. 83—86 ausgeführt.

A wurde in bekannter Weise mit Hilfe der Stützenkraftlinie (**8**) gefunden (Fig. 84). Für P_5 ergab sich

$$P_5 = \frac{4,0 \cdot 2,4}{6,0} = 1,6 \text{ t.}$$

Der Kraftplan in Fig. 85 veranschaulicht den alleinigen Einfluß von P_5 auf die Stabkräfte D_5 und D_6 des betrachteten Schnittfeldes 5—7. Bezeichnet man die von P_5 herrührenden Stabkräfte mit entsprechenden *kleinen* Buchstaben, so steht P_5 einerseits mit o_6 und d_5 und anderseits mit o_6, u_7 und d_6 im Gleichgewicht, wobei $u_5 = 0$ zu setzen ist, weil P_5 durch den o_5 zugeordneten Momentenpunkt verläuft. Durch Abgreifen in den Fig. 84 und 85 erhält man:

$$A = 10,5 \text{ t}$$
$$d_5 = -1,7 \text{ t}$$
$$d_6 = +1,8 \text{ t.}$$

Schließlich sind in der Fig. 86 noch die von der *Stützenkraft-Einheit* ($A = 1$) herrührenden Werte D'_5 und D'_6 dargestellt und mit

$$D'_5 = +0,9 \text{ t}$$
$$D'_6 = -1,2 \text{ t}$$

abgegriffen worden.

Daraus berechnen sich die *Grenzwerte aus der Verkehrslast*

$$\text{max.} +D_5 = A \cdot D'_5 + d_5 = +10,5 \cdot 0,9 - 1,7 = + \;\; 7,75 \text{ t}$$
$$\text{max.} -D_6 = A \cdot D'_6 + d_6 = -10,5 \cdot 1,2 + 1,2 = -11,40 \text{ t.}$$

Für die Berechnung von max. $-D_5$ und max. $+D_6$ würde der rechte Trägerteil zu betrachten und der linke zu belasten sein. Das wird hier nicht weiter ausgeführt.

In den Fig. 83, 87 und 88 ist schließlich *für eine gleichmäßige Belastung q von* 2 t *für* 1 m *Trägerlänge* das max. — D_3 dargestellt worden. Für einen *durch den Stab D_3 gelegten* Schnitt wurde die *Lastscheide* in Fig. 83 in bekannter Weise (**18**, c) gezeichnet. Danach bestimmte sich die Länge c des im Schnittfelde 3—5 liegenden Lastteiles (abgegriffen) mit 3,7 m. Das gibt

$$q \cdot c = 2 \cdot 3,7 = 7,4 \text{ t.}$$

Für die Feldweite von 6,0 m folgt der auf den Querträgerknoten 5 übertragene Druck p_5 mit

$$p_5 = \frac{7{,}4\left(\frac{c}{2}\right)}{6{,}0} = \frac{7{,}4 \cdot 1{,}85}{6{,}0} = 2{,}3 \text{ t.}$$

Bei der Betrachtung des rechten Trägerteiles ist p_5 sowohl mit o_4 und d_4 als auch mit o_4, u_3 und d_3 im Gleichgewicht. Dabei ist $u_5 = 0$. Aus dem Kraftplan in Fig. 88 greift man danach ab

$$d_3 = + 2{,}9 \text{ t.}$$

Ferner findet man aus dem Plane für $B = 1$

$$D_3'' = - 2{,}3 \text{ t}$$

und aus der Stützenkraftlinie der Fig. 87

$$B = 5{,}0 \text{ t.}$$

Das gibt

$$\max. - D_3 = B \cdot D_3'' + d_3$$

oder

$$\max. - D_3 = - 5 \cdot 2{,}3 + 2{,}9 = - 8{,}6 \text{ t.}$$

Es bleibt wohl zu beachten, daß für die Berechnung von max. $+ D_4$ hier nicht die nämliche Laststellung gilt, wie vorher. Denn die Lastscheide fällt im allgemeinen für jeden Wandstab eines Feldes verschieden aus, sie müßte also für einen durch D_4 gelegten Schnitt besonders ermittelt werden. Das gäbe dann einen *neuen* Wert für c und p_5, also auch für d_4.

§ 4. Äußere und innere Kräfte zusammengesetzter Fachwerke.

Wie schon die allgemeinen Beispiele im ersten Bande (I. **31**) veranschaulichen, lassen sich mit Hilfe von *Zwischengelenken* aus Scheiben und einfachen Stäben vielerlei Systeme von statisch bestimmten zusammengesetzten *Balken-* und *Bogen*fachwerken bilden. Für die Zwecke des vorliegenden Bandes genügt es aber, nur solche Systeme vorzuführen, die im Bauwesen eine Geltung erlangt haben. Das sind hauptsächlich *durchgehende Gelenkträger* und *Dreigelenkträger*, sowie auch deren Verbindungen untereinander, die bereits im I. Bande als Beispiele für die Darstellung von *äußeren Kräften*, namentlich von Momentenflächen und Mittelkraftlinien benutzt worden sind (I. **48**, **59** und **62**). Bevor ihre

Bildungsweise und Berechnung nachfolgend dargelegt werden, bleibt zu bemerken, daß bei diesen Trägern in der Regel entweder einer der Gurte gerade, der andere gebrochen oder beide Gurte gebrochen sind. *Parallel*träger kommen bei durchgehenden Gelenkträgern selten, bei Dreigelenkträgern gar nicht vor. Die Wandgliederung besteht entweder aus Ständer- oder aus Strebenfachwerk. Ausnahmsweise kommen wohl auch *besondere Gliederungen* vor, von denen weiterhin die Rede sein wird (**31**).

22. Durchgehende Gelenkträger.

a. Bildungsweise des Fachwerks. Durchgehende Gelenkträger können sowohl Balken- als auch Bogenträger sein. Sind es Balkenträger (**1**, a), so werden sie *Auslege*träger oder auch *Gerber*träger[1]

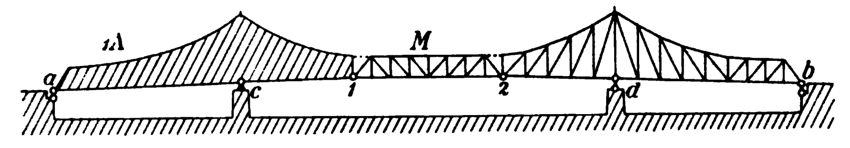


Fig. 89.

genannt. Fig. 89 zeigt das Beispiel eines über vier Stützen durchgehenden Auslegeträgers und Fig. 90 stellt ein über sechs Stützen durchgehendes Bogenfachwerk dar. Beide Systeme sind statisch bestimmt, was z. B. für Fig. 90 wie folgt nachzuweisen ist:

Vorhanden sind, einschließlich der Erdscheibe, 7 Scheiben. Es werden deshalb (nach Gl. 7. I. S. 43)

$$v = (7 - 1)\,3 = 18 \text{ Verbindungsstäbe}$$

gebraucht. Das sind

7 einfache Gelenke	14 Stäbe
4 Pendelstützen	4 -
zusammen	18 Stäbe.

Im folgenden werden nur die *Auslege*träger näher behandelt werden. Ihre Bildungsweise ist sehr mannigfaltig, bei beliebiger Zahl der Stützpunkte. Unter beliebiger (auch schräg gerichteter) Belastung sind in einem über n Stützpunkten durchgehenden Träger, um diesen statisch bestimmt zu machen,

$$n - 2 \textit{ Zwischengelenke}$$

einzulegen.

[1] Gerber hat sie im Bauwesen zuerst eingeführt.

Der Beweis hierfür kann verschieden geführt werden. Geht man dabei von der Gleichung

$$v = (s - 1)\,3$$

aus und setzt die Zahl der notwendigen Zwischengelenke gleich x, so erhält man die Zahl der Scheiben

$$s = x + 2,$$

die Erdscheibe eingerechnet. Also

$$v = 2x + (n + 1) = [(x + 2) - 1]\,3,$$

worin links die $2x$ Stäbe der x Gelenke und $(n + 1)$ Stützenstäbe zusammen gezählt sind. Weniger als $n + 1$ Stützenkräfte sind nicht zu rechnen, weil mindestens ein Stützpunkt ganz festgehalten, also mit 2 Stäben angeschlossen werden muß (I. **20**). Das gibt

$$x = n - 2. \qquad (33)$$

Einfacher folgt die Bedingung der Gl. (33) aus der Überlegung, daß die Zahl der unbekannten Stützenkräfte aus den gegebenen drei Gleichgewichts-Bedingungen der Ebene zu ermitteln sein muß. Es fehlen danach für den durchgehenden Träger

$$n + 1 - 3 = n - 2$$

Bedingungs-Gleichungen. Diese können durch Einlegen von ebensoviel Zwischengelenken erhalten werden, weil bekanntlich (nach I. **62**, a) außer den 3 Gleichgewichts-Bedingungen auch noch die Summe der Momente aller links *oder* rechts von einem Gelenke angreifenden äußeren Kräfte in Bezug auf den Gelenkpunkt gleich Null sein muß. Sonst wäre in dem Gelenkschnitte ein Gleichgewicht zwischen äußeren und inneren Kräften nicht möglich, denn innere Kräfte wirken dort nicht, können also auch nicht widerstehen; Reibungsmomente sind dort nach unsern Voraussetzungen (I. **14** und **16**) ausgeschlossen und *die auftretenden Gelenkdrücke heben sich in ihrer Wirkung zu Null auf.*

Wenn ausschließlich *lotrechte* Lasten und Stützenkräfte wirken, was in der Regel anzunehmen sein wird, entfällt eine der 3 Gleichgewichts-Bedingungen. Es würden dann aber ebenfalls $n - 2$ Zwischengelenke einzulegen sein.

b. Die Zwischengelenke. Diese können im allgemeinen an beliebigen Stellen liegen, aber mit gewissen Einschränkungen. Unendlich kleine Beweglichkeit ist zu vermeiden. Deshalb dürfen bei *Auslege*trägern *zwischen zwei Stützen nicht mehr als 2 Gelenke* liegen. Sonst tritt (nach I. **15**, Fig. 19) Beweglichkeit ein. Für durchgehende *Bogen*träger gilt diese Regel nicht (Fig. 90).

Weniger als drei Stützpunkte kann ein *Auslege*träger nicht haben, denn bei zwei Stützen und *einem* Zwischengelenke tritt entweder Beweglichkeit ein, wenn die 3 Gelenke in eine Gerade fallen, oder es entsteht ein *Bogen*träger.

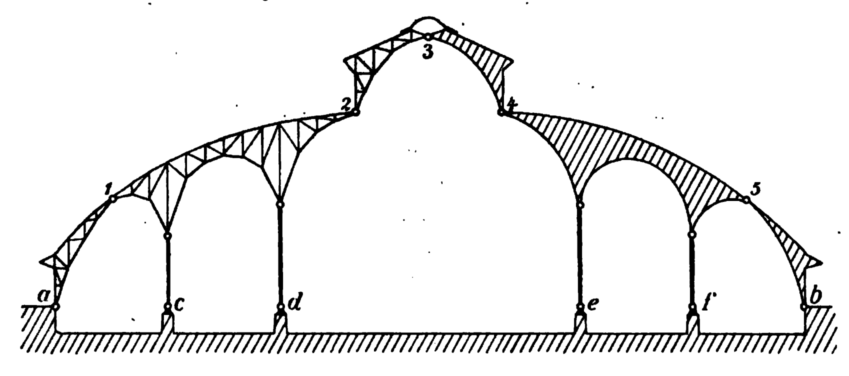


Fig. 90.

Die *konstruktive Ausbildung der Zwischengelenke* ist von Einfluß einerseits auf die notwendige Zahl der Stützenstäbe und anderseits auf die Größe der Längenausdehnung des Trägers infolge von Änderungen der Luftwärme (I. **8**).

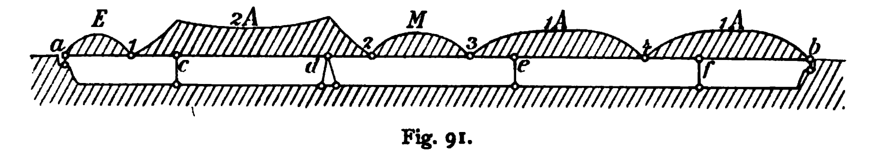


Fig. 91.

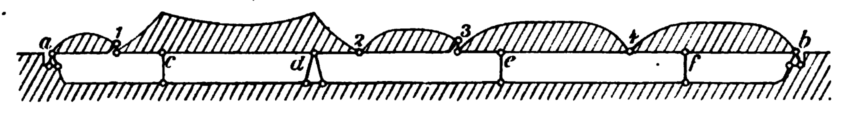


Fig. 92.

Ist der Träger *vollkommen durchgehend*, d. h. bilden seine Scheiben, wie bisher angenommen worden ist, eine gelenkige *Kette* (I. **23**), so wird man den *festen* Stützpunkt möglichst nach der Trägermitte hin verlegen, damit die Temperatur-Längenänderungen sich nicht immer nach gleicher Richtung hin vollziehen, sondern auf zwei Trägerstrecken verteilen (Fig. 91).

Günstiger gestaltet sich in dieser Hinsicht die Anordnung, wenn man an Stelle einzelner Zwischengelenke *bewegliche Stützen* einlegt,

z. B. *Pendel*stützen, *Pendelwalzen* oder *Rollen*stützen (I. **20**). Wie das geschehen kann zeigen z. B. Fig. 91 und 92. In beiden Figuren besitzt der Auslegeträger die gleiche Scheibenzahl (5 + 1) und Stützenzahl (6). In Fig. 91 ist aber nur *ein* festes Stützengelenk vorhanden (bei *d*), während in Fig. 92 drei solche Gelenke angeordnet sind (bei *a*, *b* und *d*). Das ist dadurch möglich geworden, daß an Stelle von zwei der Zwischengelenke der Fig. 91 (bei 1 und 3) in Fig. 92 bewegliche Stützen vorgesehen sind. Dadurch werden zwei Stäbe im Zuge der 5 Trägerscheiben entbehrlich. Um aber deren starre Verbindung mit der Erdscheibe aufrecht zu erhalten, sind ebensoviel Stäbe, nämlich je einer in den Stützpunkten *a* und *b*, wieder hinzugefügt worden.

Die Anordnung der Fig. 92 hat danach gegenüber derjenigen in Fig. 91 den Vorzug eines besseren Ausgleiches der Temperatur-Längenänderungen. Weitere Vergleiche ähnlicher Anordnungen müssen hier unterbleiben, weil ja die Bildungsweise der Auslegeträger oft auch von der Beschaffenheit der Örtlichkeit abhängig ist.

c. Versteifung eines Auslegeträgers durch einen Kettengurt. (Vgl. auch I. Fig. 80.) Eine derartige Anordnung zeigt das Beispiel unter **31**.

d. Berechnungshilfsmittel. Bei der Berechnung der Auslegeträger unterscheidet man im Zuge der Trägerscheiben zweckmäßig *drei verschiedene* Trägerarten (Fig. 91). Das sind

*End*träger, *Mittel*träger und die eigentlichen *Ausleger*träger.

End- und Mittelträger besitzen keine Auslegerenden, während ein Auslegeträger *einarmig* oder *zweiarmig* sein kann, wie (unter **1**, b) schon gesagt wurde. Jede Trägerart ruht auf nur zwei Stützen und ist *außen* statisch bestimmt, weil sie mit den Nachbarträgern mindestens durch drei Stäbe verbunden ist und — bei lotrechter Belastung — auch durch vier Stäbe (2 Gelenke) angeschlossen werden darf (Fig. 91 und 92).

Die Berechnung der End- und Mittelträger kann nach den in § 3 gegebenen Anweisungen erfolgen. Deshalb kommt hier nur noch die Berechnung der eigentlichen Auslegeträger in Betracht und zwar wesentlich nur für *Verkehrs*lasten, weil für *ständige* Belastung entweder Kräftepläne zu zeichnen oder andere bekannte graphische oder rechnerische Hilfsmittel (nach Ritter, Culmann, Henneberg) anzuwenden sein werden. Für die Bestimmung der Grenzwerte aus der Verkehrslast kommen hauptsächlich nur *Einflußlinien* und unter Umständen das *Momentenverfahren* in Betracht, wobei, weit mehr noch als bei den in § 3 behandelten Balkenträgern, die Einflußlinien in den Vordergrund rücken, weil in zusammengesetzten Fachwerken, *wegen des Vorkommens von*

negativen Momenten im allgemeinen auch die Gurtstäbe einen Spannungswechsel erleiden.

23. Dreigelenkträger.

a. Trägergestalt und Lage der Gelenke. Je nachdem die Träger im Hochbau als Dachträger[1] oder im Brückenbau verwendet werden, haben sie verschiedene Gestalt. Bei Dachträgern (Fig. 93) entfällt die Fahrbahn, bei Brückenträgern liegt diese oben (Fig. 94 u. 95), mitten oder unten. Bei der Lage der Gelenke sind *Kämpfer*gelenke (*a* und *b*) und *Scheitel*gelenke (*c*) zu unterscheiden. Die erstgenannten liegen in der Regel im Schnittpunkt der Obergurt- und Untergurtlinie, entweder im Untergurt (Fig. 93 bis 95) oder in der Mitte der Trägerhöhe (Fig. 96). Das Scheitelgelenk kann im Obergurt (Fig. 97), im Untergurt oder in der Mitte der Trägerhöhe (Fig. 96) angebracht werden. Daraus ergeben sich im allgemeinen die in den Fig. 93 bis 97 gezeichneten drei verschiedenen Anordnungen, die in statischer und konstruktiver Hinsicht manche bemerkenswerte Verschiedenheit zeigen.

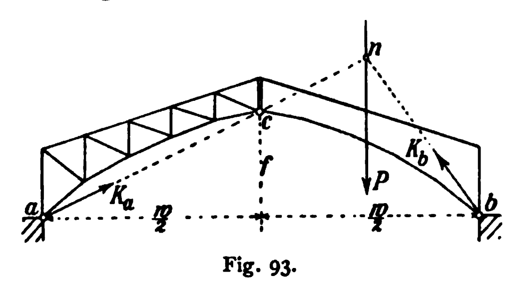


Fig. 93.

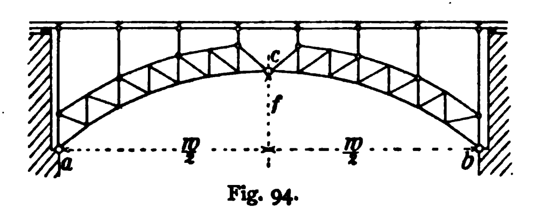


Fig. 94.

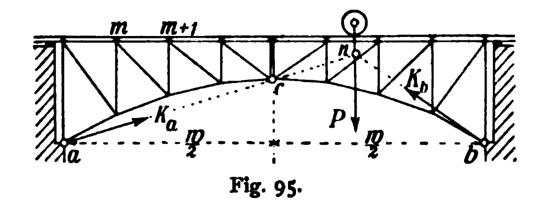


Fig. 95.

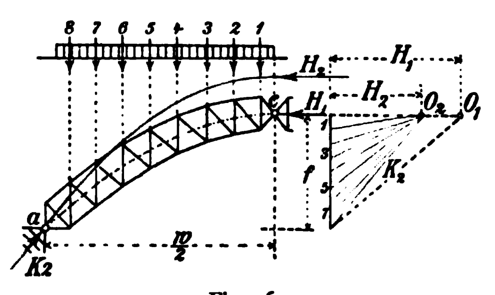


Fig. 96.

[1] Über *Dachträger* vgl. MAX FOERSTER, Die Eisenkonstruktionen der Ingenieur-Hochbauten. II. Aufl. 1903.

Beim Bogenträger mit völlig oder nahezu parallelen *Gurten* (Fig. 97) liegen die Gelenke in der Trägermittellinie günstig, weil es möglich ist die Gurte derart zu krümmen, daß *für eine ständige Belastung* die durch die drei Gelenke verlaufende *Mittelkraftlinie* (I. **59**) mit der Trägermittellinie zusammenfällt. In diesem Falle erhalten Obergurt und Untergurt in jedem Felde *gleiche Stabkräfte*, weil im Schnitte die statischen Momente der Mittelkraft für einen Obergurt- oder Untergurtknoten gleich groß sind. Das gilt als ein konstruktiver Vorzug (vgl. auch Fig. 144—146 unter I. **59**, b).

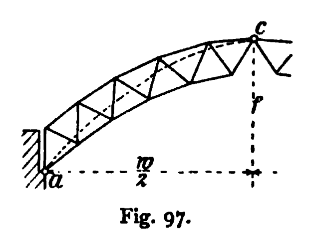


Fig. 97.

Liegen *alle Gelenke im Untergut* (Fig. 93 bis 95), so wird dieser, weil die Mittelkraftlinie immer durch die drei Gelenke verlaufen muß, die weitaus größten Stabkräfte erhalten. Krümmt man dabei den Untergurt derart, daß er für eine gewisse ständige Belastung mit der Mittelkraftlinie zusammenfällt, so bleiben *die Obergurtstäbe spannungslos* und deshalb, bei Ständerfachwerk, *auch alle Wandstreben*. Denn es ist immer (Fig. 98)

$$D_m \cdot \cos \gamma_m = O_m \cdot \cos \beta_m - O_{m+1} \beta_{m+1}. \tag{34}$$

Obergurt und Wandstreben werden hier also wesentlich *nur durch Teilbelastung* gespannt.

Wenn Kämpfergelenke und Scheitelgelenke in verschiedenen Gurten angeordnet werden, erhält man eine starke Veränderlichkeit der Hebelarme der Mittelkraft (Fig. 97) und infolgedessen fallen die Gurtstabkräfte ihrer Größe nach sehr verschieden aus, was konstruktive Nachteile mit sich bringt. Dagegen gewinnt man bei der beregten Anordnung unter sonst gleichen Umständen die größtmögliche *Stich-* oder *Pfeil*höhe f des Bogens und das hat zur Folge, daß die *wagerechte Bogenkraft* H (**1**, a) entsprechend kleiner wird, was in vielen Fällen vorteilhaft ist, um die Stärke der Widerlagsmauern, die den Bogen tragen, klein zu erhalten. Daß bei gleicher Belastung und Stützweite des Bogens die Bogenkraft H mit der Zunahme der Pfeilhöhe f abnehmen muß, ist leicht zu erkennen, wenn man für zwei verschiedene Werte von f, wie es in Fig. 96 geschehen ist, die Mittelkraftlinien durch die 3 Gelenke zeichnet. Vgl. hierzu auch die Darlegungen unter § 7.

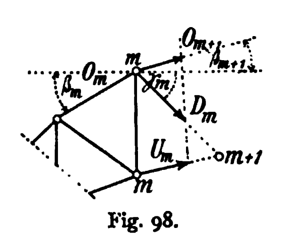


Fig. 98.

b. Verbindung eines Dreigelenkträgers mit Auslegern. Aus einer solchen Verbindung entstehen die sog. *Auslegebogenträger*, die allgemein als durchgehende Gelenkträger angesehen werden können. Fig. 90 stellt ein derartiges System dar, das im *Hochbau* Verwendung finden könnte. Fig. 99 veranschaulicht einen

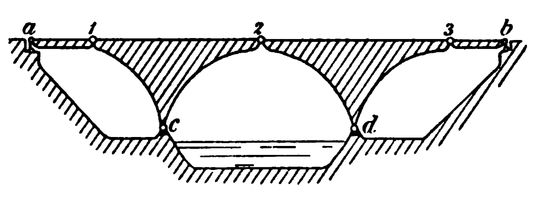


Fig. 99.

Auslegebogenträger auf vier Stützen, wie er im *Brückenbau* bereits zur Ausführung gekommen ist. Das System besitzt, einschließlich der Erdscheibe, 5 Scheiben. Es braucht

$$(5 - 1)3 = 12 \text{ Verbindungsstäbe,}$$

die in 5 Gelenken (1, 2, 3, *c*, *d*) und zwei Pendelstützen (*a*, *b*) vorhanden sind. Das System ist also *statisch bestimmt*. Vgl. ein Berechnungsbeispiel unter **31**.

c. Verbindungen von Bogen und Balken. Unter den statisch bestimmten Systemen stehen obenan die sog. *Mittengelenk-Balken*, deren Grundidee der österreichische Ingenieur LANGER gegeben hat[1]. Das sind entweder Verbindungen eines Balkens mit einem *schlaffen* Bogen, d. h. mit einem solchen Bogen, der für sich allein nicht steif oder starr ist, oder es sind Verbindungen eines Dreigelenkträgers *mit Zugbändern* oder *Zugbalken*.

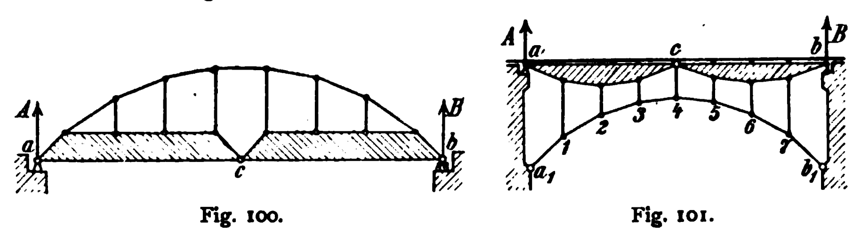


Fig. 100. Fig. 101.

Fig. 100 stellt einen Mittengelenk-Balken dar, wie ihn bereits LANGER (1871) vorgeschlagen hat. Der sog. *Versteifungs*-Balken liegt dabei unten. Fig. 101 zeigt die gleiche Anordnung mit oben liegendem Balken.

---

[1] LANGER, Die Eisenkonstruktionen für Brücken und Dachstühle. 1862. — Derselbe, Festigkeitstheorie der Brückenträger. Technische Blätter 1871. — LANDSBERG, Über Mittengelenkbalken. Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-Ver. in Hannover. 1889.

Fig. 102 veranschaulicht einen Dreigelenkbogen mit Zugband. Diese Konstruktion eignet sich besonders für Hochbauten, bei denen große Weiten zwischen hohen Mauern zu überspannen sind, weil diese dabei keine Seitenschübe durch Bogenkräfte zu erleiden haben. Denn in allen dargestellten Systemen werden infolge der Verbindung von Balken und Bogen *die wagerechten äußeren Kräfte* aufgehoben, so daß die Stützen unter lotrechten Lasten ausschließlich nur lotrechte Stützenkräfte erfahren (1).

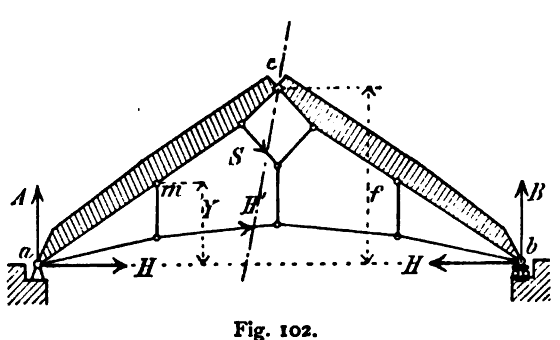


Fig. 102.

d. Berechnungshilfsmittel. Ein Unterschied zwischen der Berechnung von Auslegeträgern und Dreigelenkträgern liegt darin, daß bei diesen *für ständige Belastung die Mittelkraftlinie* gebraucht werden kann, die bei jenen — *wegen Fortfall der Bogenkräfte* — nicht vorkommt. Das Verfahren von Culmann hat deshalb hier besondere Bedeutung, denn aus der Mittelkraftlinie und dem dazugehörigen Krafteck kann für jedes Trägerfeld *Lage und Größe der Mittelkraft R* entnommen und demnach auch das Kraftviereck aus *R* und den drei Schnittkräften (*O*, *U*, *D* oder *V*) unmittelbar gezeichnet werden (I. **59**, b).

Im übrigen sind auch hier *Einflußlinien* das bequemste Mittel zur Bestimmung aller Grenzwerte aus der Verkehrslast, sowohl für die äußeren Kräfte als auch für die Stabkräfte. Die Stabkräfte für *Eigengewicht* können zwar ebenfalls aus den betreffenden Einflußflächen berechnet werden; es ist aber zu raten, sie in praktischen Fällen nach anderen Verfahren (Ritter, Culmann, Maxwell-Cremona oder Henneberg) zu bestimmen und die vorhandenen Einflußflächen nur zur Nachprüfung zu benutzen.

Über die Berechnung von Bogenfachwerken *mit mehr als drei* Gelenken vgl. das Beispiel unter **31**.

24. Zwangläufige Scheibenketten als Mittel zur Darstellung von Einflußlinien der Fachwerke. Bevor nachfolgend die Einflußlinien der zusammengesetzten Fachwerke auf *statischem Wege* ermittelt werden, soll eine einleitende Betrachtung voraufgehen, die eine *kinematische* Darstellung der Einflußlinien auf Grund des Satzes der virtuellen

Verschiebungen zum Gegenstand hat. Dadurch wird der Leser in den Stand gesetzt, beide Arten der Darstellung zu vergleichen und sich über deren Wert ein Urteil zu bilden.

a. Lage der Grenzlinien und Lastscheiden. Mit Hilfe des Satzes der virtuellen Verschiebungen (I. **23**, **24**, **34**, **40**) läßt sich das Folgende beweisen:

In der Einflußfläche einer Stabkraft eines zusammengesetzten starren Fachwerkes gehört zu jeder Scheibe eine gerade Grenzlinie, deren Lastscheide durch den Pol der augenblicklichen Bewegung der Scheibe verläuft.

Danach wird die Einflußfläche von geraden Linien begrenzt, deren Gesamtverlauf festliegt, sobald, nach erfolgter Beseitigung des betrachteten Stabes für jede Scheibe der zwangläufigen Kette (I. **24**), die Lastscheide ermittelt worden ist.

Der Beweis hierfür wurde zuerst von MÜLLER-*Breslau*[1] gegeben.

S sei die Stabkraft des in irgend einer Scheibe des Fachwerks beseitigten Stabes. Dann ist (nach I. S. 67, Fig. 89)

$$S \cdot \Delta s + \sum P\delta = 0,$$

worin Δs die Summe der Verschiebungen der beiden Knoten des beseitigten Stabes ist, und δ die Verschiebung eines unter dem unmittelbaren Angriffe einer äußern Kraft P stehenden Lastknotens bedeutet. Dabei sind die Verschiebungen stets *in der Richtung* der zugehörigen Kraft zu messen. Auch sind im zugehörigen Verschiebungsplane (I. **78** bis **81**) die Stützenbedingungen zu erfüllen.

Schreibt man obige Gleichung für eine wandernde Einzellast P an, so lautet sie

$$S \cdot \Delta s + P \cdot \delta = 0.$$

Die augenblickliche Bewegung, die man der Scheibenkette erteilt gedacht hat, kann eine *willkürliche* sein. Im vorliegenden Falle soll sie der wirklichen Verschiebung des Fachwerkes unter der Last P entsprechend angenommen werden, d. h. die Summe der Verschiebungen seiner beiden Knoten i und k soll der zu erwartenden *Längenänderung* des betrachteten Stabes gleich sein. Diese wirkt aber *ihrem Sinne nach* immer der Richtung der Stabkraft S entgegen: Ist S ein *Zug*, also ihr Pfeil nach dem gegenüberliegenden Stabknoten gerichtet (Fig. 103), so bewegt sich der Knoten, weil der Stab eine *Verlängerung* erfährt, in entgegengesetzter Richtung.

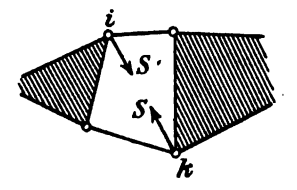


Fig. 103.

[1] Graphische Statik der Baukonstr. Band I. 3. Aufl. S. 480.

Wenn die Stabkraft ein *Druck* ist, wirkt dieser in der Richtung gegen den zugehörigen Stabknoten und die dadurch bewirkte Stab*verkürzung* entgegengesetzt.

Die virtuelle Arbeit der Stabkraft S ist danach immer *negativ*. Daraus folgt

$$S \cdot \Delta s = P \cdot \delta ,$$

wobei die Schwerkraftrichtung von P als positiv gerechnet wird.

Denkt man sich die als unendlich klein zu betrachtende Verschiebung Δs im vergrößerten Maßstabe aufgetragen und *setzt die Vergrößerung von Δs gleich der Längeneinheit*, so erhält man *für* $\Delta s = 1$

$$S = P \cdot \delta . \tag{35}$$

Es sei nun V_e der augenblickliche Pol, um den irgend eine *durch P belastete* Scheibe (V) eines Fachwerks, gegenüber der Erdscheibe E dreht (Fig. 104) und x sei der wagerechte Abstand der P-Richtung vom Pole. Dann ist der augenblickliche Weg des Angriffspunktes m aus der Winkelgeschwindigkeit ω der Polbewegung zu berechnen mit

$$\delta = x \cdot \omega .$$

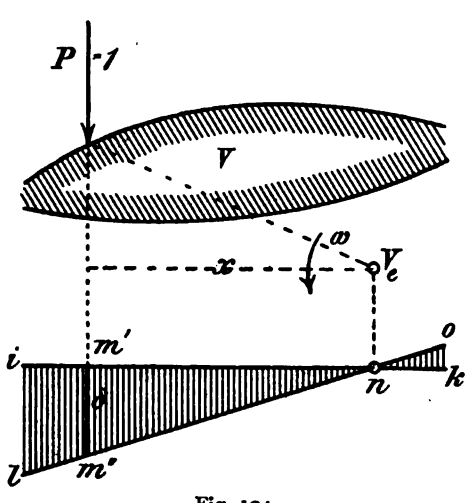


Fig. 104.

Aus dieser linearen Beziehung folgt, daß die Endpunkte m' und m'' einer Ordinate der Einflußfläche immer in zwei *Gerade ik* und lo fallen müssen, die sich auf einer Lastscheide treffen, deren Nullpunkt n lotrecht unter dem Pole liegt. Damit ist der obige Satz von der Lage der Grenzlinien und Lastscheiden der Einflußfläche bewiesen.

Sobald der Nullpunkt n festgelegt ist, was in jedem Falle durch vorherige Polbestimmungen geschehen kann, findet man den Verlauf der Grenzlinie lo der Einflußfläche durch Berechnung oder Darstellung irgend *einer* ihrer Ordinaten, die zwischen den Gelenken der betrachteten Scheibe liegt. Wie das im einzelnen ausgeführt werden kann, wird weiterhin an Beispielen gezeigt.

Besteht die zwangläufige Kette aus r Scheiben, so setzt sich die

Einflußlinie für S aus ebenso vielen geraden Grenzlinien zusammen und deren Lastscheiden verlaufen durch die betreffenden augenblicklichen Pole (Fig. 105), außerdem schneiden sich die Grenzlinien zweier Nachbarscheiben (z. B. II und III) auf der durch das gemeinsame Gelenk verlaufenden Lotrechten, weil der Gelenkpunkt als Lastpunkt beiden Scheiben angehört, also für beide zugehörige Grenzlinien auch gleiche Verschiebungen erfahren muß. Für zwei *nicht benachbarte* Scheiben — z. B. I und III — gilt das Gleiche: Ihr gemeinschaftlicher (gegenseitiger) Pol $\mathfrak{P}_{I-III}$ ist auch ein gemeinsamer Lastpunkt beider Scheiben in dem Sinne, daß der Schnittpunkt der zugehörigen Grenzlinien I' und III' lotrecht unter dem Pole $\mathfrak{P}_{I-III}$ zu liegen kommen muß.

Über die Pole der Fig. 105 ist folgendes nachzutragen: Die Pole, um welche die Scheiben gegen die Erdscheibe E drehen, tragen den Zeiger e (I_e bis III_e). Die gegenseitigen Pole sind mit I—II, II—III, I—III usw. bezeichnet. Es liegt

I_e im Stützpunkte a; III_e ist in jedem Falle festzulegen.

II_e liegt im Schnittpunkte der Polstrahlen I_e—(I—II) und III_e—(II—III).

I—III - - - - - (I—II)—(II—III) und I_e—III_e.

b. Der Grenzlinienzug der Einflußfläche als Seileck. Jeder geschlossene Linienzug läßt sich als ein Seileck auffassen, in dessen Ecken oder Knoten beliebige Kräfte wirken, wenn man dazu nur ein passendes Krafteck zeichnet. So auch der Grenzlinienzug. Die in dessen Ecken anzubringenden lotrechten Kräfte entsprechen den auf der Kraftlinie des Kraftecks (I. **54**, **55**) durch die den Seileckseiten parallelen Polstrahlen abgeschnittenen Strecken (Fig. 105). Es wird also zunächst darauf ankommen, die Größe der einzelnen Kraftstrecken aus der augenblicklichen Bewegung der Scheibenkette abzuleiten.

Man betrachte die gegenseitige Bewegung zweier beliebiger Scheiben eine Kette, z. B. der beiden Scheiben I und III (Fig. 105). Jede Scheibe drehe für sich um ihren Pol (I_e, III_e) mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit (ω_1, ω_3). Dann ist die relative Winkelgeschwindigkeit ω_{1-3} der Scheibe I gegenüber der Scheibe III mit

$$\omega_{1-3} = \omega_1 - \omega_3$$

anzuschreiben. Deshalb schneiden die zugehörigen Grenzlinien (I' und III') auf irgend einer Lotrechten die Strecke

$$v_3 = x\,\omega_{1-3}$$

ab, wenn x der wagerechte Abstand zwischen dem gemeinsamen Pole I—III und jener Lotrechten ist.

Ebenso erhält man

$$v_2 = x\omega_{2-3}$$
$$v_1 = x\omega_{1-2}.$$

Zeichnet man nun mit der Polweite x ein Krafteck, dessen Polstrahlen also den einzelnen aufeinander folgenden Grenzlinien der Ein-

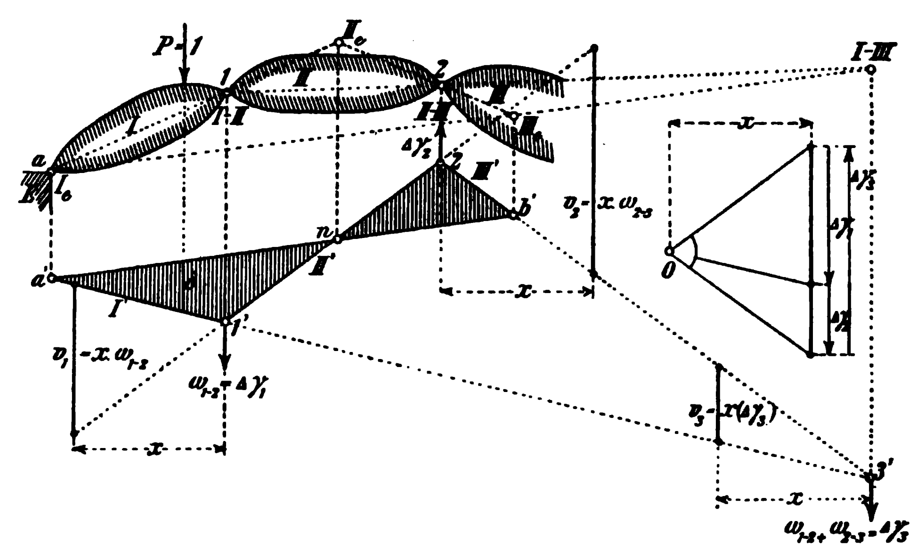


Fig. 105.

flußfläche parallel sind (Fig. 105 rechts) so erkennt man leicht, daß die von den Polstrahlen auf der Kraftlinie abgeschnittenen Strecken der Größe obiger Strecke v entsprechen. Danach hat man sich angreifend zu denken

in der Ecke I'—II' die Kraft $x \cdot \omega_{1-2}$
- - - II'—III' - - $x \cdot \omega_{2-3}$
- - - I'—III' - - $x(\omega_{1-2} + \omega_{2-3})$,

letztere als Mittelkraft der beiden vorgenannten.

Da in der Gleichung

$$S = P \cdot \delta$$

die Verschiebungen δ als unendlich kleine anzusehen sind, so bedeuten die $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ die unendlich kleinen Winkel, um welche sich die Scheiben I, II, III, ... drehen. $\omega_{1-2}, \omega_{2-3}, \ldots$ bedeuten also die unendlich kleinen *Winkeländerungen* zwischen je zwei Scheiben der Kette bei deren augenblicklicher Bewegung.

Damit wäre folgender Satz bewiesen:

Der Grenzlinienzug einer Einflußfläche kann als Seileck aufgefaßt werden, das mit Hilfe eines Kraftecks der Polweite »Eins« gezeichnet ist, und dessen Kräfte den im vergrößerten Maßstabe aufgetragenen Winkeländerungen entsprechen, die zwischen je zwei Scheiben der Kette bei ihrer augenblicklichen Bewegung stattfinden (Fig. 106).

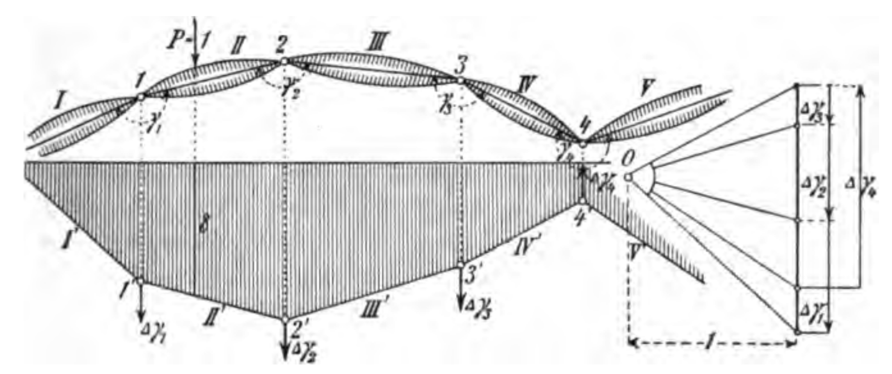


Fig. 106.

Bezeichnet man die ursprünglichen Winkel zwischen den durch die Scheibengelenke verlaufenden geraden Strecken der Scheibenkette mit γ und mit $\Delta\gamma$ die zugehörigen Winkeländerungen, so entspricht z. B. einem *positiven* $\Delta\gamma_1$ eine Rechtsdrehung der Scheibe I gegen die Scheibe II. Infolgedessen erhält das Grenzlinien-Seileck im zugehörigen Knoten 1 — wenn der Pol O, wie in Fig. 106, links von der Kraftlinie liegt — *eine nach unten zeigende Ecke* (Fig. 106 bei 1'). Umgekehrt zeigt z. B. bei einem negativen $\Delta\gamma_4$ die zugehörige Ecke 4' des Seilecks *nach oben.* Daß dem so ist, geht unmittelbar aus der Vergleichung von Krafteck und Seileck hervor.

c. Beispiele von Einflußflächen einfacher Fachwerke. Hier ist — abgesehen von der Erdscheibe und etwaigen Stützenscheiben — nur *eine* Scheibe vorhanden, die aber nach erfolgter Beseitigung eines Stabes in eine zwangläufige Kette übergeht. Beseitigt man irgend einen Gurtstab, so besteht die erhaltene Kette aus nur zwei Scheiben (Fig. 107). Dagegen erhält man vier Scheiben, wenn ein Wandstab beseitigt wird (Fig. 108), denn die dann verbleibenden beiden Gurtstäbe sind je als eine zusammengeschrumpfte Scheibe aufzufassen (I. **16**, a).

1. *Eine Gurtstabfläche* (Fig. 107). Ein Untergurtstab wurde beseitigt und in seinen Knoten i und k zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes je eine Stabkraft U als äußere Kraft angebracht. Das Fachwerk zählt

dann, außer der Erdscheibe, die Scheiben I und II, sowie die Stützenstabscheibe III. Pol I_e liegt im Stützpunkte *a*, Pol III_e im Stützpunkte *b*. Pol II_e liegt im Schnittpunkte der Polstrahlen I_e—(I—II) und III_e—(II—III). Also verläuft der Grenzlinienzug I′—II′ durch die in den drei Pollotrechten liegenden Punkte *a′*, *b′* und 1′. I′ und II′ können sonst beliebig gerichtet werden, der *Maßstab* für jede Ordinate δ ergibt sich einfach aus der Gleichung

$$\Delta s = r \cdot \Delta\gamma_1 = 1,$$

wenn *r* die vom Knoten 1 auf den Untergurtstab gefällte Lotstrecke bedeutet, d. i.

$$1 = r \cdot \Delta\gamma_1 .$$

Eine im Abstande *r* von der Ecke 1′ zwischen die Richtungen der Grenzlinien I′ und II′ gelegte lotrechte Strecke ist danach das *Maß für die Längeneinheit*, das multipliziert mit $P = 1$ t, auch das Maß für die *Krafteinheit* bildet, wonach die $\sum P\delta$ zu berechnen ist.

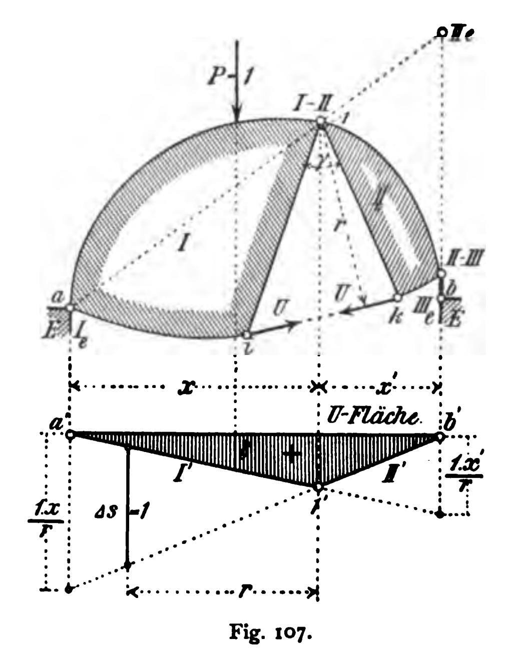


Fig. 107.

Auf der Stützenlotrechten werden (mit Bezug auf die Fig. 107) von den Grenzlinien die Strecken

$$x\Delta\gamma_1 = \frac{1 \cdot x}{r}$$

und

$$x' \cdot \Delta\gamma_1 = \frac{1 \cdot x'}{r}$$

abgeschnitten.

Das *Vorzeichen* der Einflußfläche ist *positiv*, weil die Einzellast *P*, wenn sie z. B. im Knoten 1 liegt, eine *Vergrößerung* des Winkels γ zwischen den Scheiben I und II herbeiführt.

Wenn der *Lastgurt* unten läge, so könnte *P* auf der Fahrt zwischen den Knoten *i* und *k* nur *mittelbar* wirken (**4**). Also wäre dann die Einflußlinie im Felde *ik* eine Gerade.

Die Darstellung der Einflußfläche für einen *Obergurt*stab erfolgt nach gleichen Grundsätzen. Man erkennt somit, wie die kinematische und die (unter **18**) gegebene statische Ermittlung der Einflußlinien in ihren Grundlinien zusammenfallen.

2. *Eine Wandstabfläche* (Fig. 108). Die Strebe zwischen den Knoten 1 und 2 wurde beseitigt. Das Fachwerk zerfällt dann — außer der Erdscheibe — in 5 Scheiben: Stützenstabscheibe I, Tragscheiben II und IV, Gurtstabscheiben III und V.

Die Pole finden sich wie folgt:

I_e im Stützpunkt a; IV_e im Stützpunkt b;

II—IV im Schnitte der Polstrahlen (II—III)—(III—IV) und (II—V)—(V—IV);

II_e - - - - I_e—(I—II) und IV_e—(II—IV),

III_e - - - - II_e—(II—III) - IV_e—(III—IV).

Wählt man eine beliebige Gerade $a'b'$ zwischen den Stützenlotrechten als Abzissenlinie, so verläuft der Grenzlinienzug II'—III'—IV' durch die Punkte a', $1'$, $2'$, b', die in den betreffenden Pollotrechten liegen.

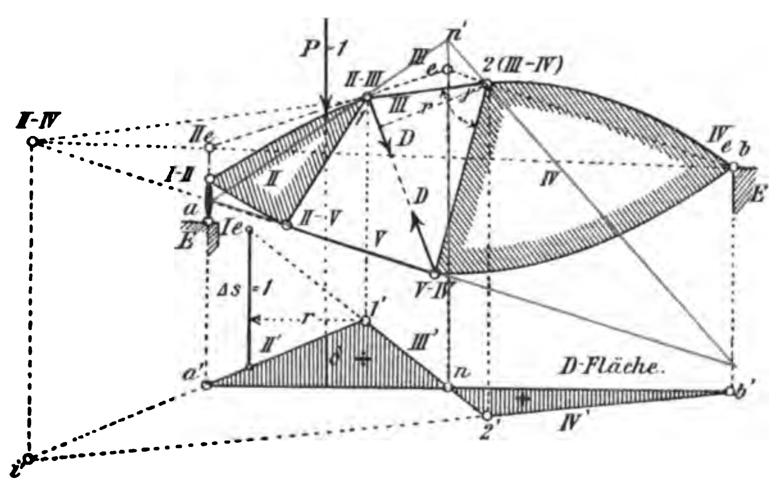


Fig. 108.

Die *Lastscheide* verläuft durch den Pol III_e; die Lage des *Nullpunktes* n ist — wie die *roten* Linien veranschaulichen — auf statischem Wege (nach **18**, c) nachgeprüft worden.

Das *Maß der Einheit* findet man mit Hilfe der auf die Strebenrichtung gefällten Lotstrecke r, wie vorher bei der Darstellung der U-Fläche, aus der gegenseitigen Drehung der Scheiben II und III. Liegt dabei die Einzellast P im Knoten 1, so muß der Winkel γ zwischen den Scheiben III und IV *kleiner* werden: $\Delta\gamma_1$ ist also *negativ*, deshalb auch das *Vorzeichen* der Teilfläche a'—$1'$—n. Das folgt übrigens ohne weiteres aus der Lage von n als Wendepunkt.

Läge P im Untergurt, so müßte an Stelle des Poles III_r der Pol V_r bestimmt werden usw. — Handelt es sich um eine *Ständer*fläche, so ändert sich das Darstellungsverfahren grundsätzlich nicht. *Nur geht dann r in die Feldweite a über.*

d. Beispiele von Einflußflächen zusammengesetzter Fachwerke sind unter **33** zu vergleichen.

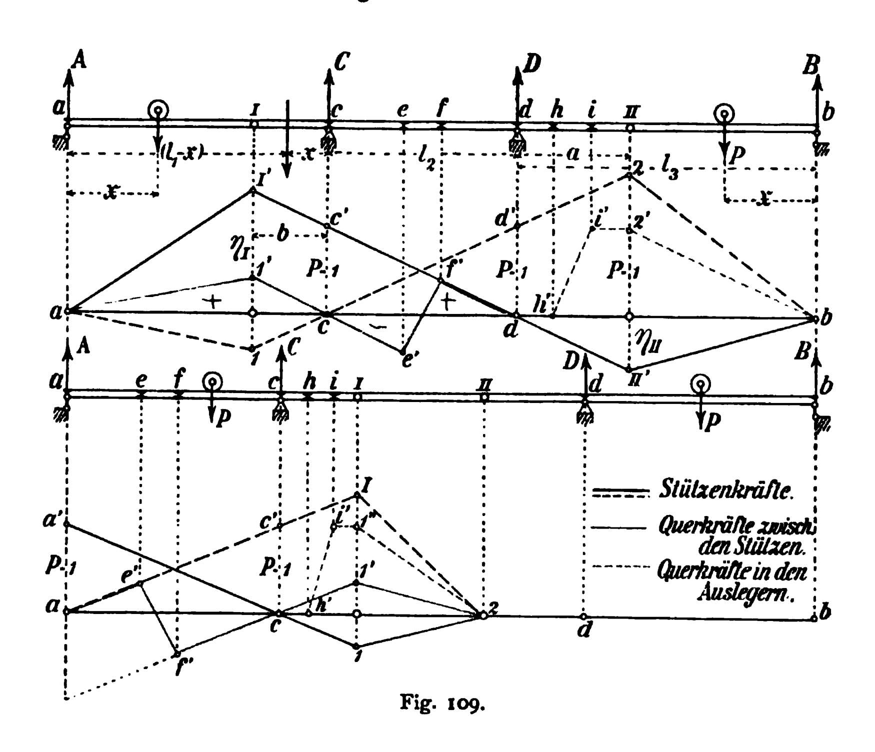


Fig. 109.

25. Einflußlinien der äußeren Kräfte durchgehender Gelenkträger.

a. Stützenkräfte und Querkräfte. In Fig. 109 (oben und unten) sind zwei verschiedene Anordnungen eines Auslegeträgers über 4 Stützen dargestellt. Oben liegt von den beiden Gelenken je eins in den Endöffnungen, während unten beide Gelenke in der Mittelöffnung angebracht sind. Stützenkräfte und Querkräfte sollen gemeinsam besprochen werden, um zu zeigen, in welcher einfachen Weise diese immer aus jenen abgeleitet werden können.

In beiden beregten Figuren sind die Stützenkräfte *schwarz*, die Querkräfte *rot* gezeichnet.

1. *Stützenkräfte C und D in Fig.* 109 *oben.* Man kann die gesuchten Einflußlinien ohne große Rechnungen aus der bekannten Einflußlinie der Stützenkraft eines einfachen Trägers ableiten. *Man beginne in derjenigen Öffnung, die keine Gelenke aufweist.* Das ist die Öffnung cd. Für den Lauf der wandernden Einzellast P innerhalb der Stützen c und d erhält man die Einflußlinie für C bekanntlich dadurch, daß man auf der Stützenlotrechten in c die Strecke cc' gleich der Einheit von P macht (**5**, a). Um danach den Gesamtverlauf der Einflußlinie zu erhalten, braucht man nur die festgelegte Gerade $c'd$ nach beiden Seiten hin bis zu den Gelenklotrechten zu verlängern und von den dadurch erhaltenen Schnittpunkten I′ und II′ weitere Gerade nach den Stützpunkten a und b zu ziehen. Dann ist die Linie aI′II″b die gesuchte Einflußlinie für C. Das folgt ohne weiteres aus dem Satze (**24**, a), nach welchem jeder *Scheibe* eine besondere gerade Grenzlinie entspricht, deren Lastscheide durch den Pol der augenblicklichen Bewegung verläuft. Analytisch erkennt man das aus folgender Überlegung:

Man betrachte zuerst den Lauf der Einzellast P auf dem *Ausleger* Ic. Liegt P in einem Abstande x von c, und wird die Stützweite cd mit l_2 bezeichnet, so muß die Momentengleichung

$$Cl_2 - P(x + l_2) = 0$$

stattfinden. Es soll in der Einflußfläche überall

$$C = P\eta$$

sein. Das gibt für $P = 1$

$$\frac{\eta}{1} = \frac{x + l_2}{l_2}.$$

Damit ist bewiesen, daß der Schnittpunkt I′ in der Verlängerung von $c'd$ liegen muß.

Rollt P auf dem Ausleger dII, so liegen zwischen der Ordinate η und den Trägerstrecken ähnliche Beziehungen vor. Es gilt dann die Momentengleichung

$$P \cdot x + C \cdot l_2 = 0$$

oder

$$P \cdot x + P\eta \cdot l_2 = 0,$$

wenn x hier den Abstand zwischen der Stütze d und dem veränderlichen Lastpunkte bezeichnet. Das gibt

$$\frac{\eta}{1} = -\frac{x}{l_2}.$$

Demnach liegt auch der Schnittpunkt II′ in der Verlängerung von $c'd$.

Schließlich betrachte man den Lauf von P auf einem der *Endträger*, z. B. IIb. Es sei x der Abstand des veränderlichen Lastpunktes vom Stützpunkte b; die Länge des Auslegers sei a. Dann erhält man die Momentengleichungen

$$P \cdot x - D l_3 + C(l_2 + l_3) = 0$$

und

$$Da - C(a + l_2) = 0.$$

Daraus folgt für $C = P\eta$:

$$\eta = \frac{ax}{l_2(l_3 - a)},$$

also eine *Gleichung ersten Grades* der Veränderlichen x. Für $x = (l_3 - a)$ erhält man

$$\eta_{II} = \frac{a}{l_2}.$$

In gleicher Weise erhält man für den Endträger Ia

$$\eta = \frac{bx}{l_2(l_1 - b)}$$

und

$$\eta_I = \frac{b}{l_2}.$$

Danach verläuft die gesuchte Einflußlinie auch über den Endträgerstrecken als eine Gerade.

Unter Beachtung des Gesagten ergibt sich die *Einflußlinie für D* wie folgt: Auf der Stützenlotrechten in d wird die Strecke dd' gleich der Lasteinheit gemacht, die Gerade $d'c$ gezogen und nach beiden Seiten hin bis zu den Gelenklotrechten verlängert. Dann ist a—1—2—b die gesuchte Einflußlinie.

2. *Stützenkräfte A und C in Fig.* 109 *unten.* Solange P auf dem einarmigen Auslegeträger II—b wandert, ist der gegenüberliegende Auslegeträger a—I unbelastet. Erst wenn P den Mittelträger I—II betritt, beginnt sein Einfluß. Es entsteht dann im Gelenk I des Auslegers I—c eine parallel zu P wirkende lotrechte Kraft, der *Gelenkdruck*, und infolgedessen werden zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes auch die Stützenkräfte A und C tätig.

Macht man die Strecke aa' gleich der Lasteinheit, so ist damit (nach 1) der Verlauf a'—c—1—2 der Einflußlinie von A gegeben. Ebenso für $\overline{cc'} = 1$ der Verlauf a—c'—I—2 der Einflußlinie für C.

3. *Querkräfte zwischen den Stützen für den linken Trägerteil.* Wie die Fig. 109 veranschaulicht, kann die Einflußlinie einer Querkraft ohne

weiteres aus den Einflußlinien der zugehörigen Stützenkräfte abgelesen werden.

Zwischen den Stützen verläuft die Einflußlinie genau so, wie bei einem einfachen Träger (**5**, b). Also ist die Querkraft Q *des linken Trägerteiles* für den Lauf der Einzellast P zwischen der Stütze d und dem Querträger f des Feldes, für welches Q bestimmt werden soll, gleich der Stützenkraft C. Die zugehörige Einflußlinie von Q ist demnach die rot gezeichnete Linie df'.

Für den Lauf der Einzellast P innerhalb der Strecke ec betrachte man den *nicht belasteten rechten* Trägerteil mit der Stützenkraft D. D ist *positiv* für den rechten, aber *negativ* für den linken Trägerteil. Deshalb ist hier

$$Q = -D$$

zu nehmen. Daraus erhält man ein weiteres Stück der gesuchten Einflußlinie für Q, nämlich die Linie ce'. Innerhalb des Feldes ef ist die Einflußlinie eine Gerade $e'f'$ (**4**). Das noch fehlende Stück für den Ausleger und den Endträger ergibt sich jetzt ohne weiteres durch Verlängern der ce' bis zur Gelenklotrechten I. Der Linienzug c—$1'$—a ist nur das Spiegelbild der Einflußlinie c—1—a der Stützenkraft D.

Nach gleichen Grundsätzen ist in Fig. 109 unten die Einflußlinie der Querkraft für das Feld ef zwischen den Stützen gezeichnet.

4. *Querkräfte in einem Ausleger für den linken Trägerteil.* So lange die Einzellast auf dem Ausleger d—II (Fig. 109) wandert, ist Q die Mittelkraft aller äußeren Kräfte für den betrachteten linken Teil, und für *unmittelbare* Lastübertragung *gleich der algebraischen Summe der Stützenkräfte* C und D, d. h.

$$Q = D - C = F.$$

Für mittelbare Übertragung gilt aber im Felde hi die Gerade $h'i'$, so daß die gesuchte Einflußlinie durch die Punkte h', i', $2'$, b verlaufen muß. Beim Laufe der Einzellast innerhalb der Strecke ah ist der rechte Trägerteil *unbelastet*, für diesen also $Q = +0$. Auf dem linken Trägerteile muß demnach $Q = -0$ sein.

In gleicher Weise ist in Fig. 109 unten die Einflußlinie $h'i'1''2$ der Querkraft für das Feld hi des Auslegers c—I gezeichnet worden.

b. Momente (Fig. 110).

1. *Im Ausleger.* Das Moment M der wandernden Einzellast P, bezogen auf einen von P um x entfernten lotrechten Schnitt tt, ist für unmittelbare Lastübertragung

$$M = \pm P \cdot x,$$

je nachdem der Schnitt auf der einen oder andern Seite von P liegt. Dabei wandert P innerhalb eines Gelenkpunktes g und einer Stütze (C oder D) und es wird stets derjenige Trägerteil betrachtet, *auf welchem P liegt*. Sobald P den Schnitt überschreitet, ist der betrachtete Trägerteil *unbelastet*, daher $M = 0$. Die Einflußlinie ist also bei unmittelbarer Lastübertragung eine Gerade, die vom Schnitte ausläuft und deren Ordinaten $\eta = \pm 1 \cdot x$ sind.

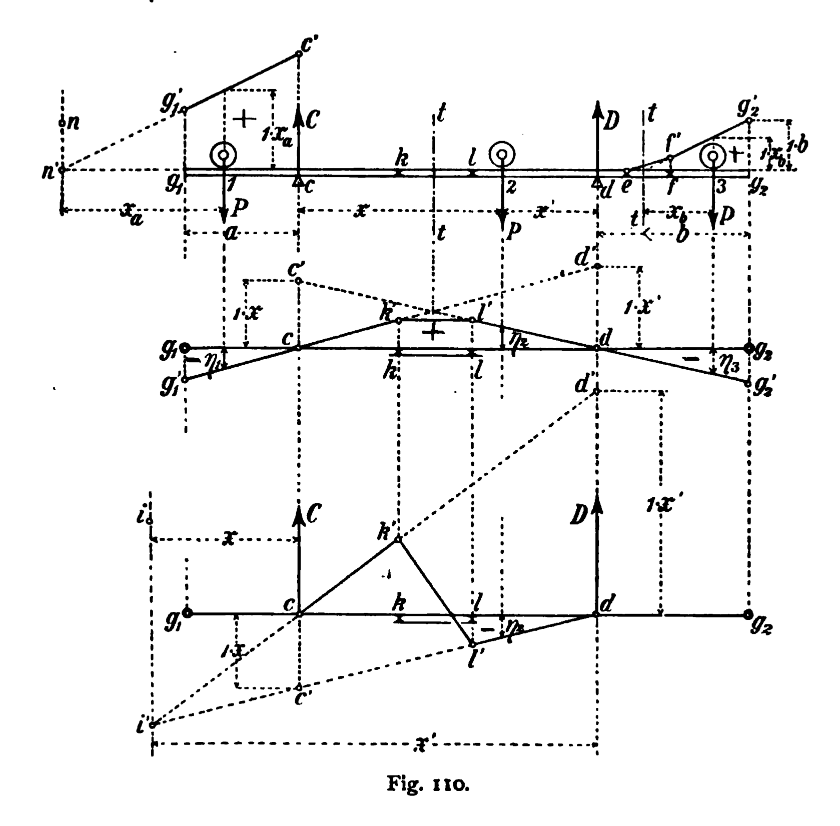


Fig. 110.

Für beide Ausleger der Länge a und b (Fig. 109 oben) ist danach je eine Einflußlinie gezeichnet. Für den rechten Ausleger ist das Moment für einen Schnitt tt im Felde ef dargestellt, wobei (nach dem bekannten Satze über den Verlauf einer Einflußlinie innerhalb zwei benachbarter Querträger) im Felde die Gerade ef' nachgetragen worden ist. Für den linken Ausleger ist die Einflußlinie des Momentes, bezogen auf einen *außerhalb* liegenden Punkt n dargestellt und zwar für unmittelbare Lastübertragung.

2. *Zwischen den Stützen.* Für die Wanderung der Last P zwischen den Stützen ist die Einflußlinie des Momentes, bezogen auf einen *Punkt innerhalb oder außerhalb* der Stützen, so zu zeichnen, wie dies für einen einfachen Träger (unter **5**, c) beschrieben ist. Danach ist in Fig. 110 (mitten) die Einflußlinie für einen Schnitt tt des Feldes kl dargestellt. Sie ist gegeben durch die Bedingung

$$M = Cx = Dx'$$

und die Strecken $cc' = 1 \cdot x$, $dd' = 1 \cdot x'$. Auf jedem Ausleger ist die Einflußlinie die Verlängerung der zugehörigen *Grenzlinie.* Für den linken Ausleger ist der rechte Trägerteil zu betrachten, auf welchem P *nicht* liegt; für ihn gilt also die Grenzlinie cd', welche den Einfluß der Stützenkraft D veranschaulicht. Für den rechten Ausleger kommt der linke Trägerteil mit der Stützenkraft C und deren Grenzlinie $c'd$ in Betracht.

In Fig. 110 unten ist schließlich für die Wanderung von P zwischen den Stützen die Einflußlinie des Momentes, bezogen auf einen *außerhalb der Stützen* liegenden Punkt i, *und für mittelbare Lastübertragung* dargestellt (vgl. **5**, c, 2). dc' ist die Grenzlinie, die bei der Betrachtung des linken Trägerteiles den Einfluß der Stützenkraft C veranschaulicht; sie gibt negative Momente. Dagegen ergeben sich aus der Grenzlinie cd', die dem Einflusse von D entspricht, positive Werte, weil für den hierbei zu betrachtenden rechten Trägerteil linksdrehende Momente positiv sind. Die beiden Grenzlinien schneiden sich auf der durch den Momentenpunkt i gelegten Lotrechten, was eine Nachprüfung der Richtigkeit der Längen cc' und dd' ermöglicht.

26. Die Stabkräfte der Auslegeträger.

a. Allgemeines über Einflußlinien. Wir stellen folgenden Satz voran:

Die Einflußfläche einer Schnittkraft O, U, D oder V ist ähnlich der Einflußfläche des auf den zugeordneten Momentenpunkt bezogenen Momentes.

Der Beweis für den Satz folgt aus der Tatsache, daß für einen nicht mehr als drei Stäbe treffenden Schnitt eines Auslegeträgers jede der drei Schnittkräfte nach der bei Besprechung des einfachen Trägers abgeleiteten Grundgleichung (16)

$$S = \frac{M}{r}$$

berechnet werden kann, wenn (wie früher) das Moment M nach dem Verfahren von Ritter (I. **68**) auf den zugeordneten Momentenpunkt bezogen wird. Aus $P = 1$ ergibt sich dann:

1) *für Schnitt und Momentenpunkt zwischen den Stützen*:

$M = + Cx$ für den linken Trägerteil
$M = + Dx'$ - - rechten -

2) für Schnitt *innerhalb* und Momentenpunkt *außerhalb* der Stützen:

$M = - Cx$ für den linken Trägerteil
$M = + Dx$ - - rechten -

3) für Schnitt und Momentenpunkt *im Ausleger*:

$$M = \pm 1 \cdot x,$$

4) für Schnitt *innerhalb* und Momentenpunkt *außerhalb* des Auslegers:

$$M = - 1 \cdot x,$$

wenn (wie früher) *zwischen den Stützen* x und x' die Abstände der Momentenpunkt-Lotrechten von der linken oder rechten Stütze c und d bedeuten und wenn im Ausleger x den Abstand zwischen dem veränderlichen Lastpunkte und dem Momentenpunkte bezeichnet.

Für $C = 1$, $D = 1$ und $P = 1$, sowie für einen Hebelarm r in Bezug auf den zugeordneten Momentenpunkt erhält man danach für eine Stabkraft S, *abgesehen vom Vorzeichen*, allgemein

$$S = \frac{1 \cdot x}{r} = S' \cdot x \text{ für den unbelasteten linken Trägerteil,}$$

zwischen den Stützen:

$$S = \frac{1 \cdot x'}{r} = S'' \cdot x' \quad - \quad - \quad - \quad \text{rechten} \quad -$$

im Ausleger:

$$S = \frac{1 \cdot x}{r}.$$

Darin bezeichnen, wie früher (**18**, a, S. 65), S' und S'' diejenigen Stabkräfte, in welche S übergeht, wenn $C = D = 1$ gesetzt wird.

Was das *Vorzeichen* der Stabkräfte anlangt, so läßt sich darüber im Hinblick auf die vorhergehenden analytischen Erörterungen ohne weiteres das Folgende aussagen.

Die Einflußfläche einer Stabkraft besitzt zwischen den Stützen so lange keine Lastscheide, wie der zugeordnete Momentenpunkt innerhalb der Stützen verbleibt. Denn das Moment bleibt für beide Trägerteile positiv.

Die Einflußfläche einer Wandstabkraft zwischen den Stützen besitzt nur dann eine Lastscheide, wenn der zugehörige Momentenpunkt außerhalb der Stützen liegt.

Die Gestalt der Einflußfläche zwischen den Stützen stimmt also im allgemeinen mit derjenigen eines einfachen Trägers (**18**, a) überein. Es

ist deshalb zu raten, beim Darstellen von Einflußlinien für Auslegeträger mit der Strecke zwischen den Stützen zu beginnen, wie das in den nachfolgenden Beispielen noch näher erläutert wird.

b. Beispiele von Einflußlinien (Fig. 111).

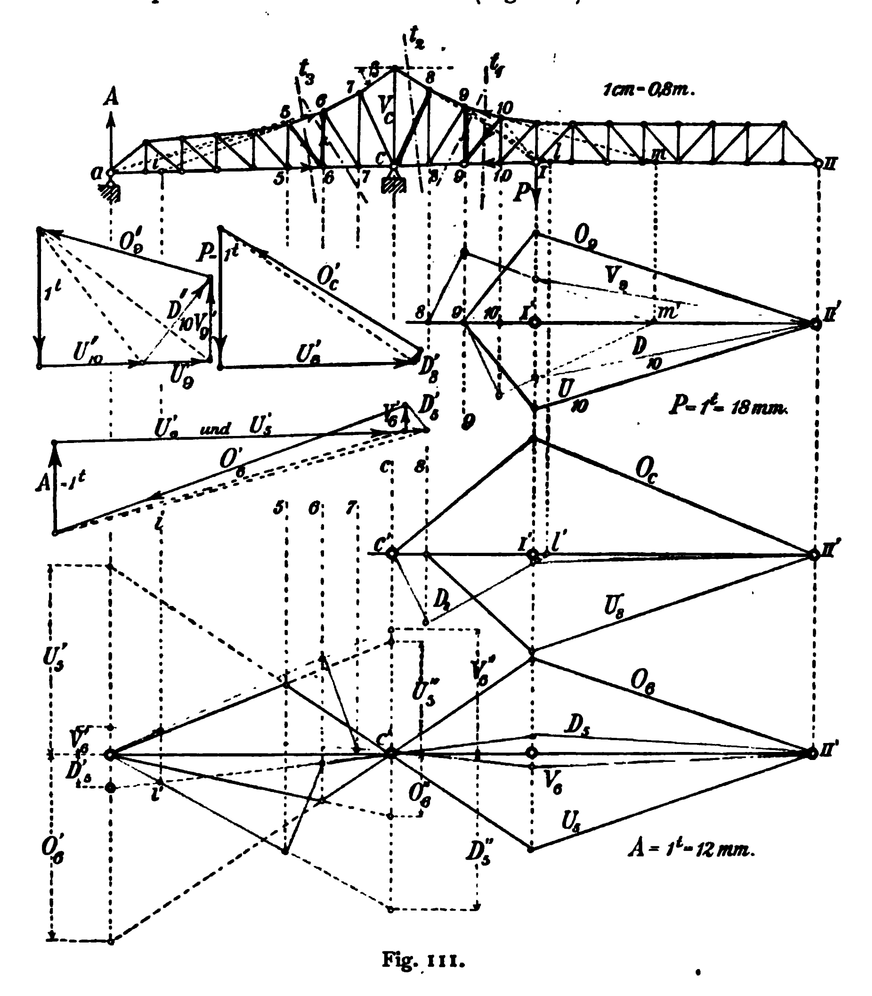


Fig. 111.

1. *Schnitt* t_1 *im Ausleger.* Es sind in Fig. 111 (oben) zwei Schnitte t_1 gelegt und darin, sowohl für die farbig gezeichneten Wandstäbe als auch für die schwarz eingetragenen Gurtstäbe, Einflußlinien dargestellt. Zu diesem Zwecke wurde für die Lage von $P = 1$ im Lastpunkte des Gelenkes I (und im Maßstabe 1 t = 18 mm) ein Kraftplan gezeichnet. Darin sind die Stabkräfte durch den Zeiger ihres Momentenpunktes und

ein Häkchen bezeichnet (O_9', V_9', D_{10}', U_{10}'). Im vorliegenden Falle genügte ein Kraftplan nach dem Verfahren von CULMANN (I. **69**). In praktischen Fällen, wo es sich meist um die Berechnung der Grenzwerte *aller* Stabkräfte handelt, empfiehlt es sich einen vollständigen MAXWELL-CREMONA-Plan anzufertigen (I. **70**). Der für die beiden Schnitte t_1 gezeichnete CULMANN-Plan bietet insofern eine Gelegenheit zur Nachprüfung, als darin die Stabkraft O_9' *zweimal* erscheint.

Der Einfluß der wandernden Einzellast P beginnt, sobald diese von rechts her im Gelenk II des Mittelträgers angelangt ist, und er erreicht, wie leicht zu ersehen, seinen größten Wert für die *Gurtstabkräfte*, wenn P das Gelenk I betritt. Die Gurtstabkräfte nehmen ab, je mehr sich P dem zugeordneten Momentenpunkte nähert, um im Augenblicke, wo P diesen erreicht hat, zu verschwinden. Eine Änderung der Einflußlinie in den Querträgerfeldern entfällt hier, weil Momenten- und Querträgerpunkte zusammenfallen, also ein Überspringen eines Lastteiles auf den weiter nach links liegenden andern Querträger des Feldes nicht möglich ist. Danach bildete die Grundlage der Darstellung für die Einflußlinien O_9 und U_{10} das Auftragen der Werte von O_9' und U_{10}' auf der Gelenk-Lotrechten in I. Diese Werte sind unter Beachtung des Vorzeichens aus dem Kraftplane entnommen worden, Raummangels halber aber nur in *halber Größe*, was bei der Berechnung der Grenzwerte zu beachten wäre.

Für die Einflußlinien *der Wandstabkräfte* der beiden Schnitte bei t_1 wurden zuerst die Strecken V_9' und D_{10}' in halber Größe auf der Gelenk-Lotrechten in I aufgetragen. Die Fortsetzung der Einflußlinien über I hinaus ergab sich dann einerseits unter Benutzung des zugeordneten Momentenpunktes m und anderseits aus dem Umstande, daß der Einfluß verschwindet, sobald P die zugehörige Feldgrenze (bei Querträger 8 und 9) überschreitet.

2. *Schnitt t_2 im Ausleger.* Für diesen Schnitt sind in Fig. 111 (mitten) die Einflußlinien der Stabkräfte O_c, U_8 und D_8 gezeichnet. Dazu gehört das aus $P = 1$, O_c', U_8' und D_8' gebildete CULMANNsche Kraftviereck, dessen Strecken in Fig. 111 in halber Größe aufgetragen sind. Die Darstellung der drei Einflußlinien geschieht hier nach den gleichen Grundsätzen, wie diese unter 1 erläutert worden sind.

3. *Die Ständerkraft V_c.* Aus dem Gleichgewicht im obern symmetrischen Ständerknoten folgt, daß bei jeder Lage der Einzellast

$$V_c = 2 \cdot O_c \sin\beta$$

ist, wenn β den Winkel bezeichnet, den die Richtung von O_c mit einer Wagerechten einschließt. Die Einflußlinie von V_c stimmt demnach mit

derjenigen von O_c überein, sobald in dieser alle Ordinaten mit $2 \cdot \sin\beta$ multipliziert gedacht werden. V_c und O_c werden Null, wenn die Einzellast zwischen den Stützen a und c wandert, weil dann das dem Gurtstabe zugeordnete Moment $M_c = 0$ ist.

4. *Schnitt* t_3 *zwischen den Stützen.* Der Schnitt ist durch zwei Felder (5—6 und 6—7) gelegt und dafür sind in Fig. 111 (unten) die Einflußlinien der Stabkräfte O_6, U_5, U_6, D_5, V_6 dargestellt worden. In dem zugehörigen *für* $A = 1$, im Maßstabe 1 t = 12 mm, gezeichneten CULMANNschen Kraftviereck wurde danach O_6' zweimal bestimmt. Die Werte U_5', U_6' und O_6' wurden in halber Größe, die Werte D_5', V_6' in ganzer Größe aufgetragen, was bei der Berechnung der betreffenden Grenzwerte zu berücksichtigen ist. Mit Rücksicht auf vorstehendes und im Hinblick auf die ausführlichen Darlegungen unter a. 1 erscheinen weitere Erläuterungen entbehrlich.

27. Äußere Kräfte der Dreigelenkträger. Hier werden (für Anfänger) die grundlegenden Erörterungen des I. Bandes über *Äußere Kräfte* und *Mittelkraftlinien* u. dgl. (I. **48**, **58**, **59**) zuerst nachzulesen sein. Danach darf die Ermittelung der äußern Kräfte am Dreigelenkträger, sowie auch die Aufgabe, eine Mittelkraftlinie durch die drei Gelenke zu legen, als bekannt vorausgesetzt werden, soweit dabei eine *ständige* Belastung in Frage kommt. Auch die Benutzung der Mittelkraftlinie für die Stabkraftberechnung wurde (unter I. **59**, b) bereits erläutert. Beispiele von Kräfteplänen für ständige Lasten (Eigengewicht) folgen weiterhin unter den Beispielen (**28**). Im nachfolgenden beschränken wir uns auf die *Darstellung des Einflusses einer wandernden Einzellast.*

a. Zerlegung der Kämpferkräfte.

1. Die *Richtungslinien.* Auf den in Fig. 112 dargestellten Dreigelenkträger, der vollwandig oder gegliedert sein kann, wirke in beliebigen Lastpunkten (1 bis 10) eine wandernde Einzellast P. So lange dabei die Richtung von P zwischen dem Stützpunkte b und dem Zwischengelenke c bleibt, erleidet der linke Bogenschenkel ac eine Kämpferkraft K_{ac}, deren Richtung durch den Gelenkpunkt c verlaufen muß. Die Kämpferkraft K_{bc}' findet man daher aus einem mit P, K_{ac} und K_{bc}' gezeichneten Kraftdreiecke (Fig. 112 oben rechts).

Wandert P links vom Zwischengelenke c, so erzeugt die Einzellast im Stützpunkte b eine Kämpferkraft K_{bc}, deren Richtung auch durch c verlaufen muß. Für irgend eine Lage von P findet man danach die zugehörigen Kämpferkräfte aus einem Kraftdreiecke, wie dies (für die Lagen 1 bis 10) in Fig. 112 (unten rechts) veranschaulicht ist.

Die bis zu den Stützenlotrechten geführten Verlängerungen der Geraden ac und bc (Fig. 112 oben), in denen sämtliche Angriffspunkte der drei äußern Kräfte P, K_{ac} und K_{bc} sich schneiden, sollen *Richtungslinien* genannt werden.

Die Richtungslinien bilden den geometrischen Ort der Schnittpunkte zwischen der Einzellast und den unter ihrem Einflusse erzeugten Kämpferkräfte.

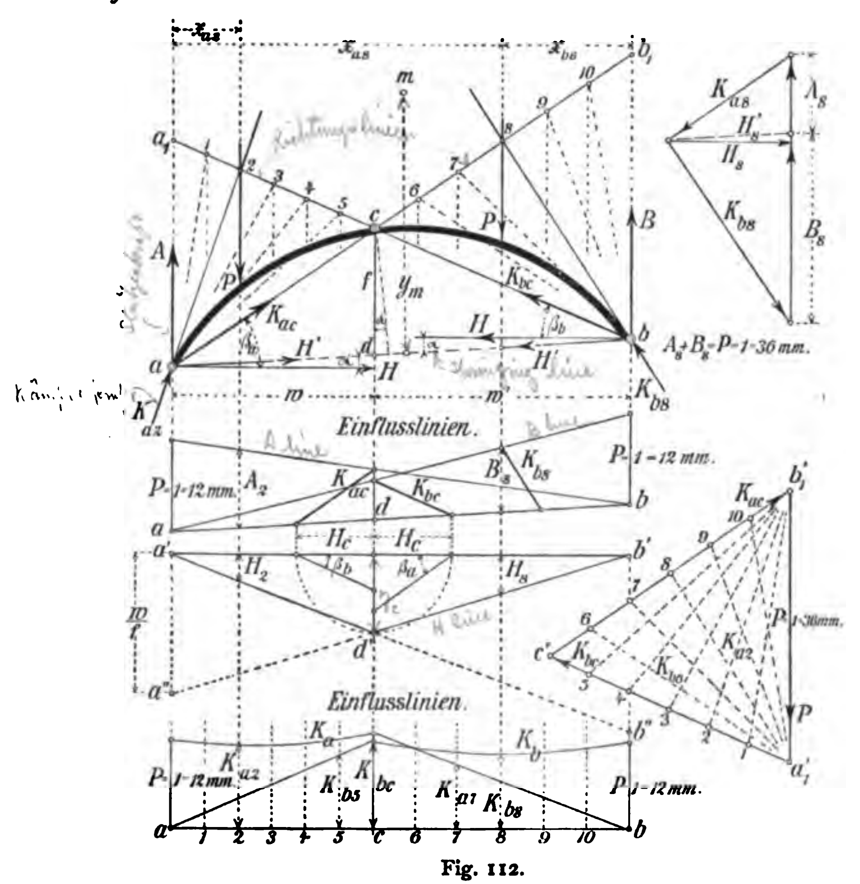


Fig. 112.

2. *Die Bogenkraft.* Wenn man eine Kämpferkraft in ihrem Stützpunkte nach lotrechter und nach der Richtung der *Kämpferlinie* (ab) zerlegt, wie es in der Fig. 112 (oben) für den Lastpunkt 8 geschehen ist, so heben sich die beiden erhaltenen *Kämpferlinienkräfte* H' zu Null auf, während die lotrechten *Stützenkräfte* A und B eben so groß werden, wie für einen auf den Stützen a und b ruhenden *Balken.* Denn

es ist (mit Bezug auf Fig. 111), und weil die Gelenkdrücke in C für sich im Gleichgewicht sind:

$$A + B = P$$

und (36)

$$A(w + w') = P \cdot x,$$

wenn w und w' die wagerecht gemessenen Längen der Bogenschenkel ac und bc bedeuten und x die Entfernung des Lastpunktes von der Stütze b angibt. Die Gleichungen (36) gelten auch für den *Balken ab*, für den $(w + w') = l$ die Stützweite ist.

Zerlegt man die *Kämpferlinienkraft* H' nach lotrechter und wagerechter Richtung, so soll *die erhaltene wagerechte Seitenkraft* H, die bei der Bogenberechnung eine Hauptrolle spielt, die *Bogenkraft* (Bogenstützenkraft) genannt werden. Im I. Bande (**64**, S. 149) haben wir sie als *Scheitel*kraft (*Horizontal*kraft) bezeichnet. Man beachte aber wohl, wie bei einer unmittelbaren Zerlegung einer Kämpferkraft K nach lotrechter und wagerechter Richtung die lotrechten Seitenkräfte *nicht mehr die Größe der Stützenkräfte eines Balkens ab* haben.

Schließt die Kämpferlinie ab mit einer Wagerechten den Winkel α ein, so ist

$$H' \cos \alpha = H. \tag{37}$$

Für $\alpha =$ Null geht die Kämpferlinienkraft H' in die Bogenkraft H über. *Wenn also die Kämpferlinie wagerecht liegt, kann der Einfluß einer Kämpferkraft K durch die Summe der Einflüsse von Stützenkraft und Bogenkraft ersetzt werden*, wobei unter der Stützenkraft diejenige eines *Balkens ab* verstanden wird.

3. *Das Moment einer Stützenkraft.* Man zerlege eine Kämpferkraft in Stützenkraft und Kämpferlinienkraft H', und betrachte einen durch P belasteten oder nicht belasteten Bogenteil. *Für die Summe der Momente der Stützenkraft und der Einzellast P in Beziehung auf einen beliebigen innerhalb oder außerhalb des Bogens liegenden Punkt m führen wir dabei die abgekürzte Bezeichnung* M_{am} *oder* M_{bm} *ein, je nachdem die linke oder rechte Stützenkraft gilt.* Ist dann M_m das Moment der Kämpferkraft für den nämlichen Punkt m, so erhält man z. B. für den linken Bogenteil:

$$M_m = M_{am} - H' y_m \cos \alpha,$$

wenn y_m den *lotrecht gemessenen Abstand des Punktes m von der Kämpferlinie* bedeutet. Die Verbindung mit Gl. (37) gibt schließlich:

$$M_m = M_{am} - H y_m. \tag{38}$$

Fällt m mit dem Gelenkpunkte c zusammen, so folgt

$$M_c = M_{ac} - H \cdot f,$$

wenn $f = \overline{cd}$ (Fig. 111 oben) die sog. *Stichhöhe*, *Pfeilhöhe*, oder den sog. *Stich*, *Pfeil* des Bogens, im Gelenke gemessen, vorstellt. Im Gelenke muß aber das Moment der auf der einen oder der andern Gelenkseite wirkenden äußern Kräfte gleich Null sein, weil dort sonst kein Gleichgewicht bestehen kann. Daraus erhält man die wichtige Bedingung:

$$H = \frac{M_{ac}}{f} = \frac{M_{bc}}{f}, \tag{39}$$

die weiterhin für die Darstellung der Einflußlinie der Bogenkraft benutzt werden wird.

4. Über *die Bestimmung der Querkräfte* folgt Näheres (unter 36) bei Behandlung der *Vollwandbogen*.

b. Einflußlinien.

1. *Bogenkraftlinie und Bogenkraftfläche.* So sollen Einflußlinie und Einflußfläche der Bogenkraft H fortan genannt werden. Man erhält sie am einfachsten aus der Bedingung der Gl. (39), wie dies in Fig. 112 (unten) dargestellt ist. Für *unmittelbare Belastung* oder für den Fall, daß bei *mittelbarer Belastung ein Querträger in der Gelenklotrechten liegt*, ist die Einflußfläche eines Momentes M_{ac} (nach **5**, c) ein Dreieck, dessen Spitze in der Gelenklotrechten liegt. Um daraus die Bogenkraftfläche zu erhalten, braucht man nur die Ordinaten der M_{ac}-Fläche durch f zu dividieren. Man trägt also z. B. auf der Stützenlotrechten in a eine Strecke $a'a'' = \frac{w}{f}$ auf und zieht die Gerade $a''b'$. Schneidet diese die Gelenklotrechte in d', so ist $a'd'b'$ die *Bogenkraftlinie*, d. h. die Einflußlinie der Bogenkraft H. Verlängert man die $a'd'$, bis sie die jenseitige Stützenlotrechte in b'' trifft, so muß die Strecke $b'b''$ gleich $\frac{w'}{f}$ sein.

Die Höhe $\eta_c = H_c$ der Bogenkraftfläche kann auch noch auf andere Weise gefunden werden: 1) mit Hilfe der Einflußlinien der Balken-Stützenkräfte A und B und 2) durch Rechnung:

In Fig. 112 (oben) sind die Einflußlinien für A und B gezeichnet worden, die bekanntlich (**5**, a) für unmittelbare und mittelbare Belastung gleiche Gestalt haben. Mit ihrer Hilfe kann man in jedem Lastpunkte das zugehörige K und H' finden, so auch für den Lastpunkt c der Gelenklotrechten. Die Projektion von K_{ac} und K_{bc} auf die Wagerechte

gibt dann zweimal das gesuchte H_c (für unmittelbare Belastung oder für mittelbare Belastung, wenn über c ein Querträger liegt).

Durch Rechnung findet man H aus der Gl. (39), wenn diese für den Lastpunkt c angewendet wird. Das gibt:

$$H = \frac{M_{ac}}{f} = \frac{Aw}{f} = \frac{Bw'}{f}.$$

Es ist aber

$$A = \frac{Pw'}{w + w'}$$

und

$$B = \frac{Pw}{w + w'}.$$

Bezeichnet man die *wagerecht* gemessene Stützweite $w + w'$, mit l, so folgt

$$H = \frac{P \cdot ww'}{lf}$$

oder für $P = 1$

$$\eta_c = H_c = \frac{ww'}{lf},$$

für *symmetrische* Anordnungen $\left(w = w' = \frac{l}{2}\right)$ ergibt sich also

$$\eta_c = H_c = \frac{l}{4f}. \tag{40}$$

In Worten:

Für unmittelbare Lastübertragung, oder wenn bei mittelbarer Übertragung ein Querträger in der Gelenklotrechten liegt, ist die Bogenkraftfläche ein Dreieck, dessen Spitze in die Gelenklotrechte fällt und dessen Höhe für $w = w'$ gleich dem Quotienten aus der Stützweite und der vierfachen Pfeilhöhe ist. Wenn kein Querträger in der Gelenklotrechten liegt, so ist bei mittelbarer Lastübertragung die Bogenkraftfläche ein Viereck, dessen mittlere Ecken in die dem Gelenke zunächst liegenden Querträgerlotrechten fallen. Wenn jedoch die Lasten auf die dem Gelenke zunächst liegenden Querträger *ausleger*artig übertragen werden, so bleibt die Bogenkraftfläche ein Dreieck. Bei einer unmittelbaren gleichmäßigen stetigen Vollbelastung q für die Längeneinheit erhält man demnach aus der Einflußfläche der Bogenkraft und für symmetrische Anordnungen:

$$H = \frac{l}{4f} \cdot \frac{l}{2} \cdot q$$

oder

$$H = \frac{ql^2}{8f}, \tag{41}$$

was auch bereits im ersten Bande (unter **65**, S. 156) auf anderm Wege nachgewiesen worden ist.

2. *Kämpferkraftflächen.* In Fig. 112 (unten) sind die Einflußflächen für K_a und K_b für unmittelbare Belastung dargestellt. Man erkennt, wie die zugehörigen Einflußlinien auf einer Gelenkseite des Bogens *gerade*, auf der andern Seite aber *krumme* Linien sind. Denn für die Lastpunkte c bis 10 ist

$$K_a = \frac{H}{\cos\beta_a}.$$

Für die Lastpunkte 1 bis c erhält man

$$K_b = \frac{H}{\cos\beta_b},$$

woraus folgt, daß die zugehörigen Einflußflächen, wie diejenige für H, Dreiecksflächen sein müssen.

K_a (für die Lastpunkte 1 bis c) und K_b (für die Lastpunkte c bis 10) können je durch eine Gleichung *zweiten* Grades ausgedrückt werden, in welcher x, der Abstand der Einzellast von den Kämpferpunkten, die einzige Veränderliche ist. Das ist aus der Fig. 112 ohne weiteres zu ersehen.

28. Die Stabkräfte der Dreigelenkträger.

a. Darstellung der Einflußlinien mit Hilfe der Bogenkraftfläche.

1. *Grundlage der Darstellung* bildet die Gl. (38)

$$M_m = M_{am} - Hy_m$$

in Verbindung mit der Gl. (16)

$$S_m = \frac{M_m}{r_m},$$

wenn S_m irgend eine Schnittkraft und r_m deren, auf den zugeordneten Momentenpunkt m bezogenen Hebelarm vorstellt. Man erhält daraus

$$S_m = \frac{y_m}{r_m}\left(\frac{M_{am}}{y_m} - H\right). \tag{42}$$

Zeichnet man also für den Klammerwert der Gl. (42) die Einflußfläche, so ist

$$\mathfrak{m} = \frac{y_m}{r_m} \tag{43}$$

ein Multiplikator, der in jedem Falle gegeben und entweder rechnerisch oder graphisch zu erhalten ist. Man kann sämtliche Werte von $\mathfrak{m}$ auch

aus einem *Kräfteplane für die Bogenkraft* $H = 1$ entnehmen, weil irgend eine Stabkraft S_m für $H = 1$ in

$$S_m^m = \frac{1 \cdot y_m}{r_m}$$

übergeht. Danach kann Gl. (42) auch in der Gestalt

$$S_m = S_m^m \left(\frac{M_{am}}{y_m} - H\right) \tag{44}$$

angeschrieben werden.

Das Vorzeichen von S_m ist abhängig vom Vorzeichen des Multiplikators S_m^m: *Je nachdem im Klammerwerte H größer oder kleiner als* $\frac{M_{am}}{y_m}$ *ist, haben* S_m *und* S_m^m *gleiche oder ungleiche Vorzeichen.*

Wie die Einflußlinien für S_m im einzelnen aufgezeichnet und *nachgeprüft* werden, soll an einem Beispiele gezeigt werden.

2. *Der Bogenträger* in Fig. 113 zeigt Ständerfachwerk und oben liegende Fahrbahn. Über dem Scheitelgelenk c liegt kein Querträger; die Einflußfläche der Bogenkraft ist also ein Viereck (**27**, b, 1). Das Fachwerk ragt über den Stützpunkt a auslegerartig vor, so daß eine im Felde 1—2 rollende Einzellast auch den Knoten e (des Auslegers) belastet. Es sind vier Einflußflächen gezeichnet: für die Schnittstäbe O, U, D und den Ständer V_a. Dabei ist die Bogenkraftfläche immer *unterhalb* einer Wagerechten $a'b'$ aufgetragen und die Ordinaten η der *schraffierten* Einflußflächen entsprechen dem Klammerwerte der Gl. (42). Bei der Berechnung der *Grenzwerte* der Stabkräfte sind die aus den schraffierten Flächen erhaltenen Kraftgrößen also noch mit

$$\mathfrak{m} = \frac{y_m}{r_m}$$

zu multiplizieren.

Die Darstellung der Bogenkraftfläche ist bekannt, als Grundlage dient dabei die Gleichung (39)

$$H = \frac{M_{ac}}{f} = \frac{M_{bc}}{f}.$$

Um die Differenz des Klammerwertes der Gl. (42) unmittelbar graphisch auszuführen, wird man im allgemeinen die positiven M_{am}-Flächen ebenfalls nach unten, die negativen dagegen nach oben auftragen. Im vorliegenden Falle lagen die den Schnittkräften O, U, D, V_a zugeordneten Momentenpunkte o, u, d, v alle *innerhalb der Stützweite ab*, d. h. die M_{am}-Flächen waren alle positiv und daher nach unten aufzutragen.

3. *Die Einflußflächen der Gurtstabkräfte O und U* findet man leicht, wenn man (nach **18**) die *Einflußlinie des Momentes für einen*

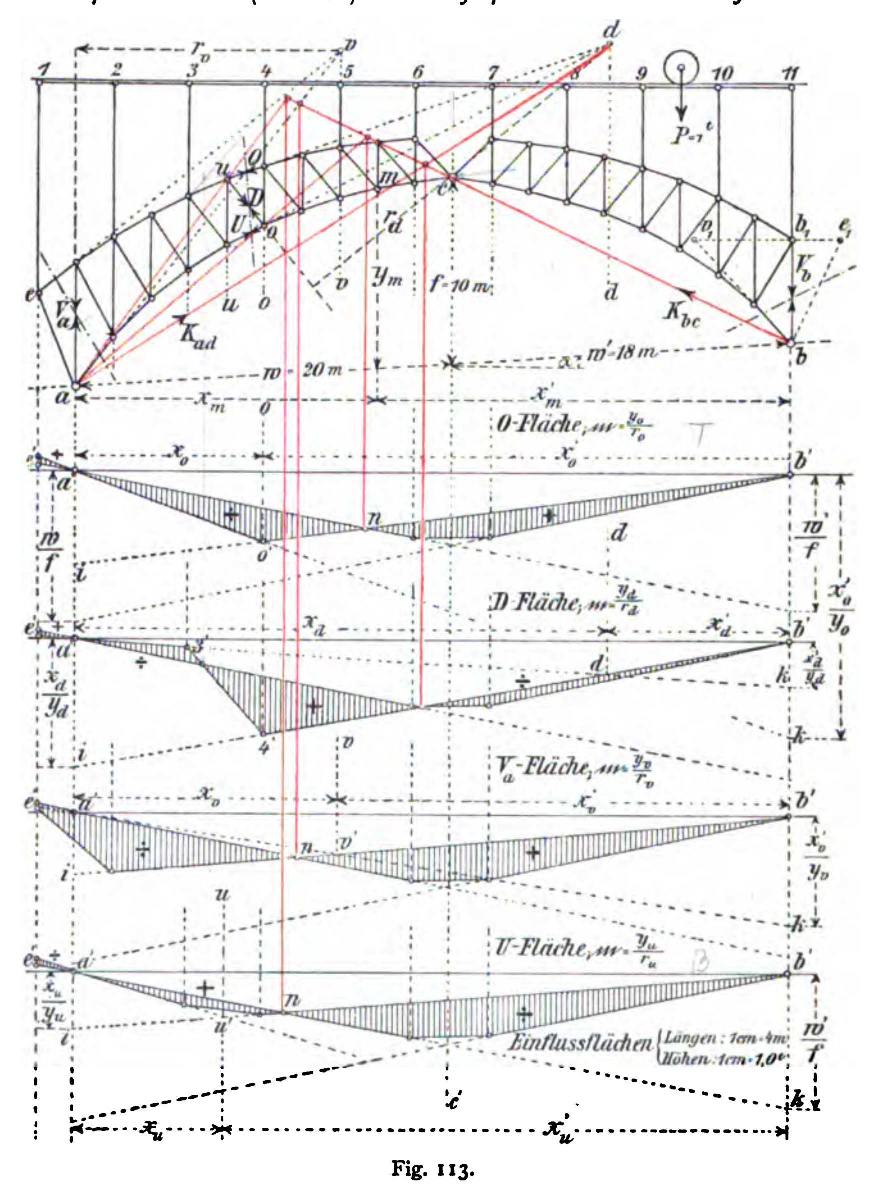


Fig. 113.

Balken auf den Stützen *a*, *b* und für den zugeordneten Momentenpunkt (*o*, *u*) zeichnet, dabei aber (maßstäblich) alle Ordinaten durch den

lotrechten Abstand des Momentenpunktes von der Kämpferlinie ab (also durch y_o oder y_u) dividiert. Das ist in der Fig. 113 geschehen. Die *Grenzlinien* der so erhaltenen Flächen für $\frac{M_{ao}}{y_o}$ und $\frac{M_{au}}{y_u}$ schneiden sich (nach **18**, a) auf der Momentenpunkt-Lotrechten. Dadurch erhält man *ein Mittel zum Nachprüfen* der Richtigkeit der Darstellung: Auf der Stützenlotrechten durch a wurde die Strecke $a'i = \frac{x_o}{y_o}$ oder $\frac{x_u}{y_u}$ gemacht, deshalb muß auf der Stützenlotrechten durch b die von der Verlängerung der $a'o'$ (oder $a'u'$) abgeschnittenen Strecke $b'k = \frac{x'_o}{y_o}$ oder $= \frac{x'_u}{y_u}$ gefunden werden.

Ein zweites Mittel *zum Nachprüfen* bietet das Aufsuchen der *Lastscheide* (**3**). Diese findet man wie folgt: Bei der Betrachtung des linken Bogenschenkels (in welchem unsere Schnittstäbe liegen) und bei *unbelastetem* rechten Bogenschenkel verläuft die rechtsseitige Kämpferkraft K_{bc} durch das Gelenk c. Die linksseitige Kämpferkraft ist dabei nach dem in der *Richtungslinie* (**27**, a, 1) liegenden Lastpunkte gerichtet. Der bewegliche Lastpunkt muß aber *in die Lastscheide* fallen, wenn die linksseitige Kämpferkraft K_a durch den zugeordneten Momentenpunkt einer Schnittkraft verläuft. Denn da die Kämpferkraft die einzige äußere Kraft ist, die bei Betrachtung des linken Trägerteiles auf diesen wirkt, so muß gleichzeitig mit ihrem Momente in Bezug auf den zugeordneten Momentenpunkt auch die betreffende Stabkraft verschwinden.

Danach schneiden die Kämpferkräfte K_{ao} und K_{au} die Richtungslinie in denjenigen Lastpunkten, durch welche die betreffenden Lastscheiden verlaufen. Deren Darstellung ist in der Fig. 113 durch *rote* Farbe hervorgehoben worden.

4. *Die Einflußflächen der Wandstabkräfte D* und V_a werden in der nämlichen Weise gefunden und nachgeprüft, wie dies für die Gurtstabkräfte beschrieben ist. Zu beachten bleibt, daß die Grenzlinien $a'k$ und $b'i$ der Einflußflächen sich auf der betreffenden Momentenpunkt-Lotrechten (in d' und v') schneiden. Für den Lauf der Last P zwischen den Querträgern 4 und 11 wird der linke Trägerteil mit der Stützenkraft A betrachtet. Daher gilt hierbei in der Einflußlinie die Strecke $4'b'$ der *für A gezeichneten* Grenzlinie. Für den Lauf der Einzellast zwischen den Querträgern 1 und 3 wird der rechte Trägerteil betrachtet. Hier gilt also die Strecke $a'3'$ der Grenzlinie $a'k$, die den *Einfluß von B* darstellt. *Zwischen den Querträgern sind die Einflußlinien gerade* (**4**).

5. *Die Vorzeichen der Einflußflächen* bestimmen sich am einfachsten

aus derjenigen Teilfläche, deren Klammerwert (nach Gl. 42) *positiv* ist. Das ist in der O-Fläche das Dreieck $a'o'n$. Die zugehörige Stabkraft O ist also *Druck*. In der nämlichen Weise findet man die Vorzeichen der U-Fläche. — In der D-Fläche ist der Klammerwert positiv für das Dreieck, dessen Spitze in $4'$ liegt und das zur Grenzlinie $b'i$ gehört, die den Einfluß von A darstellt. Demnach ist der linke Trägerteil zu betrachten. Darin dreht D um den Momentenpunkt d links. Klammerwert und Moment von D haben also verschiedene Vorzeichen, woraus folgt, daß das Dreieck der D-Fläche bei $4'$ positiv bleibt.

In der Einflußfläche für V_a liegen links von der Lastscheide n die negativen Ordinaten. Der Klammerwert ist positiv, die Stabkraft aber negativ, weil V_a im linken Trägerteil um den Momentenpunkt v rechts dreht, woraus *gleicher Drehsinn der Momente, also negative Stabkraft* folgt.

Wenn man die Multiplikatoren $\mathfrak{m} = S_m'''$ aus einem für $H = 1$ gezeichneten Kräfteplan entnimmt, so entscheidet für irgend eine Lage der Einzellast P, wie vorhin erläutert, das Vorzeichen von S_m''' auch über die Vorzeichen der Einflußfläche.

6. *Im Ausleger* bei e (Fig. 113) entstehen Stabkräfte, sobald die Einzellast P in das Feld 2—1 tritt. Ebenso beeinflußt P dann alle Stabkräfte des eigentlichen Bogenträgers zwischen a und b. Schreitet P über die Stützenlotrechte in a hinaus, so entsteht in b eine *negative Kämpferkraft*, die in eine negative Stützenkraft B und in eine negative Kämpferlinienkraft H' zu zerlegen ist. Auch die Bogenkraft H ist dann negativ. Der Einfluß von B und H auf die Stabkräfte ergibt sich in diesem Falle aus der Betrachtung des *unbelasteten* rechten Trägerteiles dadurch, daß man die Einflußlinie der Bogenkraft H und die für B gezeichnete Grenzlinie $a'k$ über a' hinaus verlängert, denn nicht die Größen, sondern nur *der Sinn* von B und H werden andere. So sind die für eine Belastung des Auslegers geltenden Strecken $a'e'$ der vier Einflußflächen (O, U, D, V_a) entstanden.

Wollte man die Einflußfläche von V_b zeichnen, so könnte man, wie es in der Fig. 113 dargestellt ist, das Vorhandensein eines *unbelasteten* Auslegers b—b_1—e_1 voraussetzen und dann durch den Ständer $b b_1$ einen Schnitt legen, der auch den Auslegerstab $b_1 e_1$ und den Untergurtstab des Endfeldes bei b trifft. Der dem Stabe V_b zugeordnete Momentenpunkt wäre damit (in v_1) festgelegt usw.

7. *Die Grenzwerte der Stabkräfte* berechnen sich aus den schraffierten Einflußflächen. Beispielsweise sollen ermittelt werden

$$\text{max.} + D$$

und

$$\text{max.} - D,$$

wobei der Berechnung ein *Eigengewicht* des Trägers von 0,9 t und eine gleichmäßig verteilte *Verkehrslast* von 2,0 t für die Einheit der Stützweite zugrunde gelegt werden soll. Die Kämpferlinie ab schließt mit der Wagerechten einen Winkel α ein, dessen Kosinus gleich 0,99 beträgt. Das gibt so geringe Unterschiede zwischen den Maßen der Kämpferlinie und der wagerecht gemessenen Stützweite, daß beide (genau genug) miteinander vertauscht werden sollen.

In den Einflußflächen sind die Längen im Maßstabe 1 cm = 4 m aufgetragen. Die Höhen, mit $P = 1$ t multipliziert, bedeuten Tonnen und es gilt für sie 1 cm = 0,5 t, weil die Strecken $a'i$ in doppelter Größe gezeichnet sind. Danach ergeben sich (durch Abgreifen aus der Fig. 113) die Inhalte der drei Teilflächen:

Die beiden *positiven* Teilflächen: $\frac{12{,}0 \cdot 0{,}75}{2} + \frac{2{,}0 \cdot 0{,}4}{2} = 4{,}9$

- - *negativen* - $\frac{7{,}0 \cdot 0{,}2}{2} + \frac{19{,}8 \cdot 0{,}3}{2} = 3{,}67.$

Die aus dem Eigengewicht herrührende Stabkraft beträgt demnach

$$D_e = +(4{,}9 - 3{,}67)\,0{,}9 = +1{,}11 \text{ t}.$$

Aus der Verkehrslast ergibt sich:

$$+D_v = 4{,}9 \cdot 2{,}0 = +9{,}80 \text{ t}$$
$$-D_v = 3{,}67 \cdot 2{,}0 = -7{,}34 \text{ t}.$$

Daraus folgen die *Grenzwerte* mit:

$$\text{max.} +D = +1{,}11 + 9{,}80 = +10{,}91 \text{ t}$$
$$\text{max.} -D = -7{,}34 + 1{,}11 = -6{,}23 \text{ t}.$$

b. Unmittelbare Darstellung der Einflußlinien. Bei diesem Verfahren braucht man weder die Bogenkraftfläche noch die Einflußfläche des Momentes M_{am}, somit entfällt dabei auch die Verwendung der Multiplikatoren m.

1. *Für jede Lage* m *der Einzellast P zwischen einer Kämpfer- und der Gelenklotrechten* erfährt der *nicht*belastete Bogenschenkel eine in die Richtungslinie fallende Kämpferkraft (K_{ac} oder K_{bc}). Das ist die einzigste auf den durch P nicht belasteten Teil wirkende äußere Kraft. Dazu ist sie proportional der Bogenkraft und jeder Stabkraft. Ihr Einfluß auf eine Stabkraft S läßt sich demnach durch ein Dreieck darstellen, dessen Spitze in der Gelenklotrechten liegt (**27**, b, 1). Die Einflußlinie für S ist gegeben, sobald man *für die Lage von* $P = 1$ *in* c die zugehörige Stabkraft S_c als Ordinate η_c auf der $a'b'$ in c aufträgt. So

wurden z. B. in der Fig. 114 (rechts) aus einem CULMANN-Plane für $P = 1$ in c die von der Kämpferkraft K_{ac} hervorgerufenen Stabkräfte U_c, V_c und D_c entnommen und als Ordinaten η_c aufgetragen. Damit waren die *Einflußlinien* $b'c_1$ für die bezeichnete Wanderung der Last P unmittelbar gegeben.

2. Sobald die Last P — z. B. von rechts her (Fig. 114 oben) — das Gelenk überschreitet, wirkt auf den rechten Bogenschenkel als einzigste äußere Kraft die Kämpferkraft K_{bc}, die in c einen Gelenkdruck K_{bc} erzeugt, dessen *alleiniger* Einfluß auf eine Stabkraft S durch die Einflußlinie $a'c_1$ bestimmt ist. Außer K_{bc} wirkt im Stützpunkte a noch die Kämpferkraft K_a, deren Richtung von der Lage der Einzellast abhängig ist. Man zerlege nun sowohl K_a als auch K_{bc} je in *zwei Seitenkräfte*, von denen eine lotrecht ist und die andere in die Richtungslinie ac fällt. Das seien A und K_{ac} im Stützpunkte a, sowie C und K_{ac} im Gelenke c (Fig. 114 oben): A und C berechnen sich aus P *wie für einen einfachen Balkenträger* auf den Stützen a und c. Daraus folgt, daß jede Stabkraft S in einem Schnitte des Bogenteils ac, wenn man dabei den von P *nicht belasteten* Trägerteil betrachtet, nur von zwei äußern Kräften beeinflußt wird. Das sind für den linken Trägerteil A und K_{ac}, für den rechten Teil C und K_{ac}. Der Einfluß von K_{ac} ist aber bereits gefunden; *addiert man also dazu den Einfluß von A oder C*, je nachdem man den linken oder rechten Teil eines *Balken*trägers ac betrachtet, so findet man den gesuchten Einfluß der Last P für jede Lage ihrer Wanderung zwischen Gelenk c und Kämpfer a. Die Addition kann *unmittelbar* dadurch ausgeführt werden, daß man *die für A gezeichnete Grenzlinie der Einflußfläche anstatt in c' im Punkte c_1, also um η_c vergrößert, einträgt*, wie es z. B. in den Einflußflächen für D, V und U (Fig. 114) geschehen ist.

3. Nach obigem findet man die Einflußflächen für irgend eine Stabkraft S — in Übereinstimmung mit den unter **18** gegebenen ausführlichen Darlegungen — mit Hilfe der Strecken $a'i = S'$ und $c_1k = S''$. Dem entsprechend sind in Fig. 114 (unten und oben) zwei CULMANN-Pläne gezeichnet, für $A = 1$ t und $C = 1$ t, die für die Betrachtung des linken oder rechten Trägerteiles, also für den Lauf der Last P zwischen den Querträgern 1—2 oder 3—5 verwendet worden sind. Danach wurde z. B. die D-Fläche (Fig. 114) wie folgt dargestellt:

$\eta_c = c_1c'$ hat sich *negativ* ergeben, weil K_{ac} und D beide um den Momentenpunkt d *in gleichem* Sinne drehen (I. **68**, a). $a'i = D'$ ergab sich, wie die Pfeilrichtungen des zugehörigen CULMANN-Planes ausweisen, *positiv*, war also oberhalb der $a'b'$ aufgetragen. Die Grenzlinie für A

ist nicht als ic', sondern als ic_1 eingetragen, um die Addition des Einflusses von K_{ac} unmittelbar darstellen zu können. Die Lage der

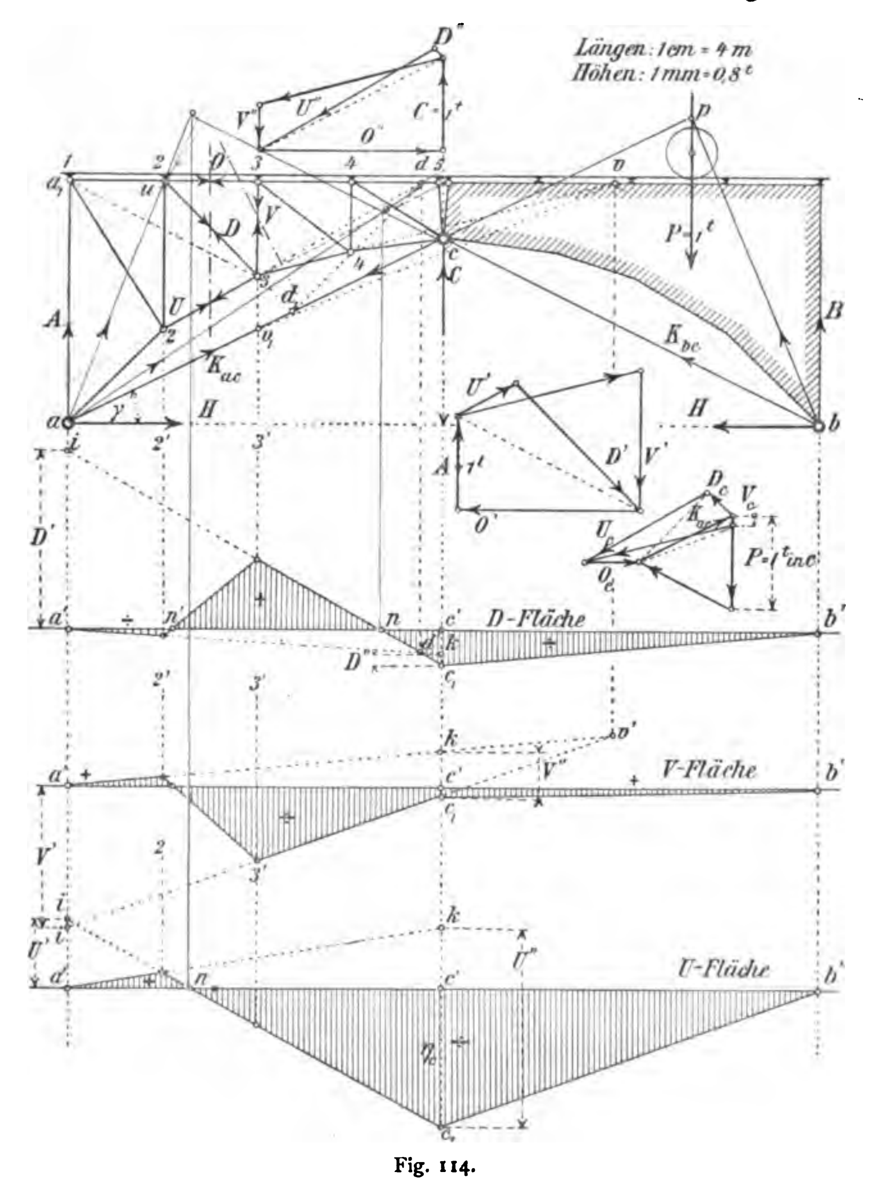


Fig. 114.

Grenzlinie $a'k$ für C findet sich aus der Bedingung, daß beide Grenzlinien sich auf der Momentenpunkt-Lotrechten (in d') schneiden. Bei

der *Nachprüfung* muß sich also die Strecke $c_1 k = D''$ ergeben, was aus dem CULMANN-Plane für $C = 1$ zu sehen ist (Fig. 114 oben). Schließlich bleibt noch die Nachprüfung mit Hilfe der *Lastscheide*. Sie ist in *roten* Linien (in bekannter Weise) ausgeführt. Wollte man auch die Lastscheide im Felde 2—3 (bei n') nachprüfen, so würde dies *wie bei einem Balkenträger auf den Stützen a und n* (**18**, c) zu geschehen haben, weil die Fläche $a'n'n$ mit der Einflußfläche von D für einen derartigen Träger übereinstimmt.

4. Auch die Einflußflächen für V und U sind nach den eben entwickelten Grundsätzen dargestellt (Fig. 114). $\eta_c = c_1 c'$ ergibt sich auch hier *negativ*. Die V-Fläche hat nur *eine* Lastscheide im Felde 2—3, die (wie oben gesagt) nachgeprüft werden könnte. Die Lastscheide der U-Fläche ist in *roten* Linien nachgeprüft worden.

Schließlich wolle man noch beachten, daß es *nicht notwendig ist, überhaupt einen Plan für $P = 1$ in c zu zeichnen, sobald man in der Einflußfläche eine Lastscheide festlegen kann.* Denn in diesem Falle findet sich der Punkt c_1 der Gelenklotrechten durch Verlängerung der Geraden in von selbst. Im Ernstfalle ist aber zu raten, mehrfache Nachprüfungen vorzunehmen und dazu auch den Plan für $P = 1$ in c zu verwenden. Im vorliegenden Beispiele genügte dafür ein CULMANN-Plan; sollte es sich aber um Darstellung von Einflußlinien für alle Stabkräfte handeln, so würden sich MAXWELL-CREMONA-Pläne mehr empfehlen.

§ 5. Beispiele von zusammengesetzten Fachwerken.

29. Mittengelenk-Balken.

a. Der durch einen Balken versteifte schlaffe Bogen. Unter Hinweis auf das (unter **23**, c) Gesagte soll nachstehend die Berechnung des in Fig. 115—116 gegebenen *Beispieles* vorgeführt werden.

1. Wie leicht zu ersehen ist, läßt sich die für den Dreigelenkträger abgeleitete Gleichung (38)

$$M_m = M_{am} - H y_m$$

auch hier verwenden, woraus folgen würde, daß die Berechnung nach dem für Dreigelenkträger gegebenen Verfahren durchgeführt werden kann.

Für einen durch das Mittengelenk c und den mittlern Bogenstab geführten Schnitt erhält man

$$M_{ac} = M_{bc} = Hf$$

oder

$$H = \frac{M_{ac}}{f}.$$

Danach ist die Bogenkraftfläche als *Dreiecks*fläche darzustellen, wenn, wie im vorliegenden Falle angenommen wird, über c entweder ein

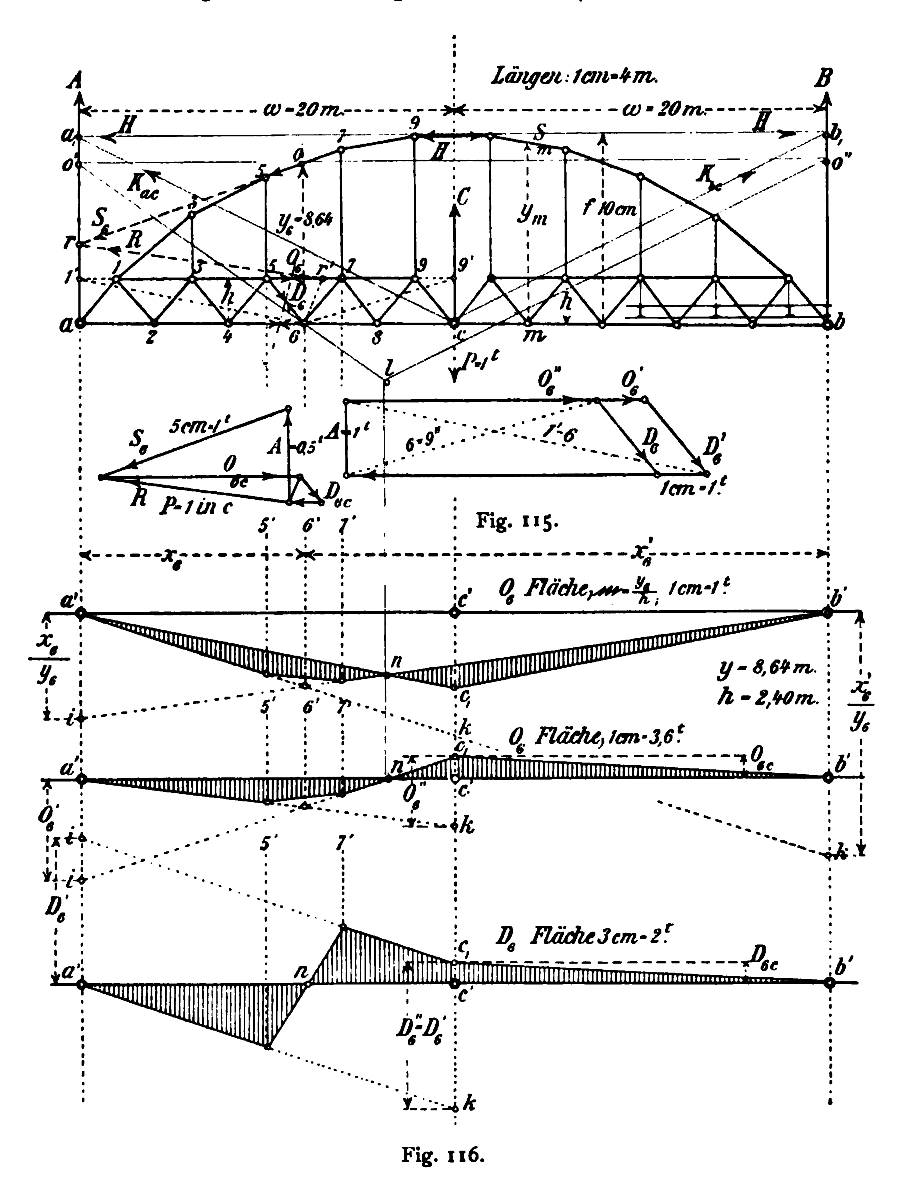


Fig. 115.

Fig. 116.

Querträger liegt oder doch eine *Trennungsfuge* in der Fahrbahn vorgesehen ist.

Die größte Bogenkraft entsteht unter Vollbelastung. Um also die Grenzwerte der Stabkräfte in den Bogenfeldern zu erhalten, braucht man nur einen Kräfteplan für $H = 1$ zu zeichnen. Auf den Versteifungsbalken ab wirken außer der Bogenkraft H auch noch die Stützenkräfte A und B.

2. Man führe durch einen beliebigen Momentenpunkt m des Balkens einen lotrechten Schnitt, der auch den betreffenden Bogenstab trifft, und zerlege die Bogenstabkraft S_m im Schnittpunkte in zwei Seitenkräfte H und V. Dann verläuft die lotrechte Seitenkraft V durch m, liefert also in Bezug auf m kein Moment, woraus

$$M_m = M_{am} - Hy_m$$

folgt, wenn y_m der lotrechte Abstand zwischen dem Momentenpunkte m und der Richtung der Stabkraft S_m ist. *Danach berechnen sich die Stabkräfte des Versteifungsträgers wie bei einem Dreigelenkträger.*

3. *Die Stabkraft* O_6, im Felde 5—7 (Fig. 116 oben), findet sich unter Benutzung der Bogenkraftfläche wie folgt. Es ist

$$O_6 = \frac{M_6}{h}$$

oder

$$O_6 = \frac{y_6}{h}\left(\frac{M_{a6}}{y_6} - H\right).$$

Danach ist die O_6-Fläche gezeichnet. Die Darstellung ist nach vorigem (**28**) ohne weiteres verständlich. Für die *Nachprüfung* der Lastscheide n wurden die *Richtungslinien* (**27**, a) benutzt: Im Punkte o des durch den Knoten 6 geführten Schnittes greift die Bogenkraft H an. Sie wird in ihrer Richtung, nach beiden Seiten hin, soweit verschoben, bis sie die Richtungen der Stützenkräfte A und B in o' und o'' trifft. Falls die Mittelkraft aus H und A durch den Knoten 6 verläuft, wird $M_6 = o$. Der rechte Trägerteil (bc) ist dann *unbelastet*, weshalb für einen durch das Mittengelenk geführten lotrechten Schnitt die in b_1 angreifende Mittelkraft aus H und B durch das Gelenk c verlaufen muß, weil

$$Bw = Hf$$

oder

$$\frac{B}{H} = \frac{f}{w}.$$

Das Verhältnis von $\frac{B}{H}$ bleibt aber unverändert, solange die Einzellast P den linken Trägerteil (ac) nicht verläßt. Für jede beliebige Lage von P zwischen a und c muß also die *Mittelkraft aus H und B parallel*

zur Richtungslinie $b_1 c$ laufen. Die gesuchte Lastscheide geht demnach durch den Schnittpunkt l der Mittelkraft-Richtungen $o'l$ und $o''l$.

4. In Fig. 116 (mitten) ist die O_6-Fläche nach dem *unmittelbaren*, (unter **28**, b gegebenen) Verfahren noch einmal dargestellt. Zu dem Zwecke sind in Fig. 115 zwei CULMANN-Pläne gezeichnet: für $P = 1$ in c und für $A = 1$.

Liegt die Einzellast $P = 1$ t im Gelenke c, so verlaufen die Kämpferkräfte nach den Richtungslinien und für die Stützenkräfte erhält man

$$A = B = 0{,}5 \text{ t}.$$

Das gibt aus

$$H \cdot f = A w$$

$$H = \frac{A w}{f} = \frac{0{,}5 \cdot 20}{10} = 1{,}0 \text{ t}.$$

Damit ist im Schnittfelde auch die Bogenstabkraft S_6 gegeben. S_6 und A wurden im Punkte r zu einer Mittelkraft R zusammengesetzt, deren Richtung den Obergurt im Punkte r' trifft (Fig. 115). Daraus ergaben sich im Plane für $P = 1$ in c, O_{6c} und D_{6c}.

Im Plane für $A = 1$ wurden schließlich O_6', D_6', sowie auch O_6'' und D_6'' gefunden. D_6' ist dabei gleich D_6''. Der Maßstab der Einflußflächen für O_6 ist so gewählt worden, daß deren Ordinaten *gleiche Größe* erhielten. Deshalb wurden die Ordinaten der unmittelbar gezeichneten O_6-Fläche durch den Multiplikator der andern O_6-Fläche dividiert, d. h. durch

$$\mathfrak{m} = \frac{y_6}{h} = \frac{8{,}64 \text{ m}}{2{,}40 \text{ m}} = 3{,}6.$$

Der Maßstab der Ordinaten berechnet sich also auf

$$1 \text{ cm} = 3{,}6 \text{ t}.$$

5. In Fig. 116 (unten) ist schließlich mit Hilfe der erwähnten beiden CULMANN-Pläne (Fig. 115) nach dem unmittelbaren Verfahren auch noch die D_6-Fläche gezeichnet. Die Darstellung ist (unter Beachtung des Vorigen) an sich verständlich.

6. *Der Dreigelenkträger mit aufgehobener Bogenkraft.* Unter den verschiedenen Möglichkeiten Bogenträger in Mittengelenk-Balken umzuwandeln, steht die Anwendung eines *dritten* Gurtes zwischen den Kämpfern, eines *Zug*gurtes, obenan. Man nennt ein derart zusammengesetztes Fachwerk gewöhnlich einen *Bogenträger mit Zugband.*

Die Berechnung solcher Bogenträger deckt sich fast ganz mit derjenigen für die Dreigelenkträger. Man erhält z. B. für einen durch das

Scheitelgelenk c der Fig. 117 geführten Schnitt eine Gleichung zwischen M_{ac} und den Stabkräften S und H'. Denn die Summe der statischen Momente muß in Beziehung auf c gleich Null sein. S und H' sind allein von der Bogenkraft H abhängig, denn man kann für $H = 1$ einen Kräfteplan zeichnen, aus welchem S und H' zu entnehmen sind. Für einen beliebigen Knoten m erhält man danach

$$M_m = M_{am} - H(y + \delta). \tag{45}$$

Darin stellt $H\delta$ ein Moment vor, das dem auf m bezogenen Momente von H' und S gleichwertig ist. δ ist dabei aus den Hebelarmen von H' und S, unter Beachtung der Verhältnisse von $H' : S' : H$, zu berechnen.

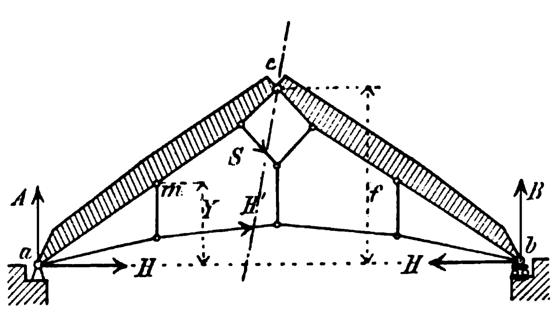


Fig. 117.

Um die Einflußfläche für eine Stabkraft S_m, wie früher beim Dreigelenkträger, mit Hilfe der Bogenkraftfläche darzustellen, ist die Gl. (42) in

$$S_m = \frac{y+\delta}{r_m}\left(\frac{M_{am}}{y+\delta} - H\right) \tag{46}$$

zu verwandeln. Das Weitere ist bekannt (nach **28**).

30. Fünfgelenk-Dachbinder auf vier Stützen. Der in Fig. 118 dargestellte Binder eines Bogendaches zählt 5 Scheiben und 2 freie Knoten, bedarf also zu seiner starren Verbindung mit der Erdscheibe

$$(5 - 1)3 + 2 \cdot 2 = 16$$

Verbindungsstäbe, die auch vorhanden sind. Seine Untersuchung auf unendlich kleine Beweglichkeit kann mit Hilfe zweier Verschiebungsecke ausgeführt werden, wie dies im ersten Bande (unter **80**, Fig. 254) gezeigt worden ist.

a. Einflußzahlen der äußeren Kräfte. Um die Berechnung des Binders auszuführen, genügt es, nacheinander zwei lotrechte Lasten V in den Gelenken einer der beiden Dachseiten wirkend anzunehmen und deren Einfluß auf die äußern Kräfte, für jedes V gesondert, zu bestimmen.

1. V liege im Gelenk 3. Dann sind 5 Unbekannte vorhanden: Je eine Stützenkraft (A und B) und eine Bogenkraft (H) in den Kämpfergelenken a und b, dazu je eine lotrechte Stützenkraft (C und D) in den Stützpunkten c und d der Pendelsäulen. Zu ihrer Berechnung stehen zunächst die Gleichgewichts-Bedingungen zur Verfügung:

$$1)\quad A + B + C + D = V,$$
$$H_a - H_b = 0, \quad \text{d. h.} \quad H_a = H_b = H.$$
$$2)\quad A(s + 2t) + C(2t) - Bs = 0.$$

Ferner gibt es für je eins der drei Gelenke 1, 2, 3 eine Gleichung der statischen Momente

$$3)\quad As - Hh + S_a r = 0,$$
$$4)\quad A(s + t) - Hf + Ct = 0,$$
$$5)\quad A(s + 2t) + C(2t) - Hh + S_b u = 0.$$

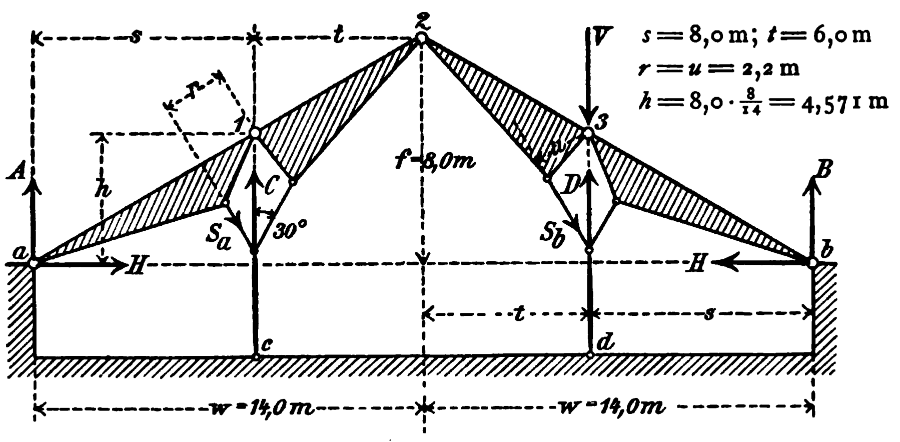


Fig. 118.

Da S_a allein von C und S_b allein von D abhängig ist, so genügen die aufgestellten 5 Gleichungen, um daraus die 5 Unbekannten A, B, C, D, H zu berechnen.

Der Winkel, den S_a und S_b mit der Lotrechten einschließen, sei 30 Grad. Dann ist anzuschreiben

$$2 S_a \cos 30^\circ = C$$
$$2 S_b \cos 30^\circ = D,$$

und daraus

$$S_a = \frac{C}{2 \cdot 0{,}866}$$
$$S_b = \frac{D}{2 \cdot 0{,}866}.$$

Setzt man diese Werte und die in der Fig. (118) eingeschriebenen Maße der Hebelarme ein, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
&1)\ A + B + C + D = V,\\
&2)\ 20A + 12C - 8B = 0,\\
&3)\ 8A - 4{,}571H + 1{,}270C = 0,\\
&4)\ 14A - 8H + 6C = 0,\\
&5)\ 8B - 4{,}571H + 1{,}27D = 0.
\end{aligned}
$$

Die Ausrechnung ergab folgende *Einflußzahlen*:

$$
\begin{aligned}
A &= -0{,}168\,V\\
B &= -0{,}420\,V\\
C &= \pm 0{,}000\,V\\
D &= +1{,}588\,V\\
\hline
\text{Summe} &= +1{,}000\,V
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Ferner wurde gefunden

$$H = -0{,}294\,V.$$

2. Wenn die Last V im Scheitelgelenk 2 wirkend gedacht wird, liegt Symmetrie des Fachwerks und der Belastung vor. Die Unbekannten vermindern sich dann auf drei und für ihre Berechnung können folgende Gleichungen angeschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
&1)\ A + C = 0{,}5\,V,\\
&2)\ As - Hh - S_a r = 0,\\
&3)\ A(s + t) - Hf + Ct = 0.
\end{aligned}
$$

Setzt man darin den Wert für S_a und die gegebenen Hebelarme ein, so erhält man

$$
\begin{aligned}
&1)\ A + C = 0{,}5\,V,\\
&2)\ 8A - 4{,}571H + 1{,}27C = 0,\\
&3)\ 14A - 8H + 6C = 0
\end{aligned}
$$

und die Ausrechnung gibt

$$
\begin{aligned}
A = B &= +0{,}50\,V\\
C = D &= \pm 0{,}00\,V\\
\hline
\text{Summe} &= +0{,}50\,V
\end{aligned}
\tag{48}
$$

ferner

$$H = 0{,}875\,V.$$

Die Stützenkraft C wird bei rechtsseitiger Belastung *gleich Null*. Das ist auch ohne vorherige Rechnung einzusehen, denn eine Last im Gelenk 2 zerlegt sich nach den Richtungen $2-a$ und $2-b$, die durch die Kämpferpunkte verlaufen.

b. Benutzung der Einflußzahlen beim Berechnen der Grenzwerte der äußern und innern Kräfte. Es sollen berücksichtigt werden 1) das *Eigengewicht* des Binders, 2) *einseitige oder volle Schneelast*, 3) *Winddruck von rechts oder links.*

1. *Eigengewicht.* Aus Tabellen[1] sei entnommen worden das Gewicht für 1 qm Grundriß des Daches

für Dachdeckung	50 kg
- Eisengewicht des Binders	20 kg
zusammen	70 kg/qm

Die Entfernung zweier Binder sei 5 m. Dann entfällt auf jeden Binder *für* 1 m *Länge der Stützweite* das Gewicht von

$$70 \cdot 5 = 350 \text{ kg}.$$

Man denke sich das Gesamtgewicht in 5 Seitenkräfte zerlegt, die in den 5 Gelenkpunkten a, 1, 2, 3, b angreifen. Dafür erhält man

$$V_a = V_b = \frac{8}{2} \cdot 300 = 1200 \text{ kg}$$
$$V_1 = V_3 = 1200 + \frac{6}{2} \cdot 300 = 2100 \text{ kg}$$
$$V_2 = 2 \cdot \frac{6}{2} \cdot 300 = 1800 \text{ kg}$$
$$\text{zusammen } 28 \cdot 300 = 8400 \text{ kg}.$$

Unter Benutzung der in den Gl. (47 u. 48) gefundenen *Einflußzahlen* — und wenn beachtet wird, *daß* V_a *und* V_b *nur die Stützenkräfte* A *und* B *beeinflussen* — ist also ohne weiteres anzuschreiben:

$$A = B = 2100(-0{,}168 - 0{,}420) + 1800(0{,}50) + 1200 = +865 \text{ kg}$$
$$C = D = 2100(0{,}0 + 1{,}588) + 1800(0{,}0) = +3335 \text{ kg}$$
$$H = -2100(2 \cdot 0{,}294) + 1800(0{,}875) = +340 \text{ kg}.$$

2. *Schneelast.* Der Schneedruck soll mit 70 kg/qm angerechnet werden. Die äußern Kräfte aus der *vollen* (beiderseitigen) Schneelast sind hier also ebenso groß, wie dies für das Eigengewicht bereits bestimmt wurde. Es bleibt nur noch der *einseitige* Schneedruck zu berücksichtigen. Dafür erhält man, bei Belastung *rechts*:

$$A = 2100 \cdot (-0{,}168) + 900 \cdot 0{,}5 = 97 \text{ kg}$$
$$B = 2100 \cdot (-0{,}420) + 900 \cdot 0{,}5 + 1200 = 768 \text{ -}$$
$$C = 2100 \cdot 0{,}0 + 900 \cdot 0{,}0 = 0{,}0 \text{ -}$$
$$D = 2100 \cdot 1{,}588 + 900 \cdot 0{,}0 = 3335 \text{ -}$$
$$H = 2100 \cdot (-0{,}294) + 900 \cdot 0{,}875 = 170 \text{ -}$$

[1] LANDSBERG, Statik der Hochbaukonstr. Handbuch der Architektur. I. Teil. 2. Aufl. 1899. — FOERSTER, Die Eisenkonstruktionen der Ingenieur-Hochbauten. 2. Aufl. 1903.

3. *Winddruck.* Der *senkrecht zur Dachfläche* wirksame Winddruck W berechnet sich allgemein aus

$$W = w \cdot \sin(\alpha + 10)^0,$$

wenn w den senkrecht auf 1 qm *schräge* Dachfläche ausgeübten Druck und α den Neigungswinkel des Daches bedeuten. Die Richtung des Windes wird dabei gewöhnlich um 10^0 gegen die Wagerechte geneigt angenommen. Für mitteleuropäische Verhältnisse berechnet sich $w = 120$ kg/qm, wenn dabei eine Windgeschwindigkeit von etwa 30 m in der Sekunde zugrunde gelegt wird. Zerlegt man W in zwei Seitenkräfte, von denen eine *lotrecht*, die andere in der Richtung der schrägen Dachlinie wirkt, so ist die letztere Windkraft ohne Einfluß auf die äußern Kräfte. Die lotrechte Seitenkraft ist daher für die Berechnung allein maßgebend. Wird sie mit V_w bezeichnet, so ist für *schräge* Dachfläche

$$V_w = \frac{120 \cdot \sin(\alpha + 10)^0}{\cos\alpha}.$$

Auf den *Dachgrundriß* bezogen erhält man

$$V_w = \frac{120 \cdot \sin(\alpha + 10)^0}{\cos^2\alpha}.$$

Aus $\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{14} = 0{,}5714$ berechnet sich $\alpha = 29^0\,40'$.

Das gibt *abgerundet*:

$$V_w = \frac{120 \cdot 0{,}638}{0{,}755} = 100 \text{ kg}.$$

Beim Zerlegen des gesamten rechtsseitigen Winddruckes auf die drei Punkte 2, 3 und b findet man

$$V_{wb} = 5 \cdot 100 \cdot \frac{8}{2} \qquad\qquad = 2000 \text{ kg}$$

$$V_{w3} = 5 \cdot 2000 + 5 \cdot 100 \cdot \frac{6}{2} = 3500 \text{ -}$$

$$V_{w2} = 5 \cdot 100 \cdot \frac{6}{2} \qquad\qquad = 1500 \text{ -}$$

und danach schließlich

$$A = 3500(-0{,}168) + 1500 \cdot 0{,}5 \qquad = \quad 162 \text{ kg}$$
$$B = 3500(-0{,}420) + 1500 \cdot 0{,}5 + 2000 = 1280 \text{ -}.$$

Der Winddruck V_{wb} im Stützpunkte b bleibt ohne Einfluß auf die äußern und innern Kräfte, weil er vom Kämpfergelenk aufgenommen wird, also nur dessen Befestigung auf der Mauer beansprucht. Ferner folgt

$$C = 3500 \cdot 0{,}0 \quad + 1500 \cdot 0{,}0 \quad = \quad 0{,}0 \text{ kg}$$
$$D = 3500 \cdot 1{,}588 \quad + 1500 \cdot 0{,}0 \quad = 5558 \text{ -}$$
$$H = 3500(-0{,}294) + 1500 \cdot 0{,}875 = \quad 284 \text{ -}.$$

4. *Die Grenzwerte der äußern Kräfte.* Die aus den Einflußzahlen gewonnenen Ergebnisse sind für die möglichen Belastungsfälle in der folgenden Tabelle eingeschrieben und in deren letzten beiden Spalten die größten und kleinsten Grenzwerte zusammengerechnet worden.

Tabelle I. Berechnung der Grenzwerte.

Stützenkraft	Eigengewicht	Schneelast		Windlast rechts	Grenzwerte	
		rechts	voll		größter	kleinster
	kg	kg	kg	kg	kg	kg
A	865	97	865	162	1892	865
B	865	768	865	1280	3010	865
C	3335	0,0	3335	0,0	6670	3335
D	3335	3335	3335	5558	12228	3335
H	340	170	340	284	964	340

5. *Die Grenzwerte der innern Kräfte in den Scheiben* können für die oben berechneten gefährlichsten Belastungszustände jetzt leicht ermittelt werden. Dabei können die Belastungen V_a und V_b in Fortfall kommen, wenn man die betreffenden Stützenkräfte A und B um ebensoviel kleiner rechnet. Am bequemsten findet man die Grenzwerte der in Rede stehenden Stabkräfte wohl auf graphischem Wege mit Hilfe von Kräfteplänen (I. § 10 u. 11). Man kann auch eine *Mittelkraftlinie* durch die 5 Gelenke legen und CULMANN-Pläne zeichnen. (Vergl. das folgende Beispiel.)

31. Ein durch einen Kettengurt versteifter Auslegeträger. Das in der Fig. 119 dargestellte symmetrische Fachwerk besteht aus 7 Scheiben (einschließlich der Erdscheibe) und besitzt 33 freie Knoten. Es ist deshalb mit

$$(7 - 1)\,3 + 2 \cdot 33 = 84$$

Verbindungsstäben auszurüsten. Diese sind vorhanden, nämlich

5 Stützenstäbe
10 Stäbe der 5 Scheibengelenke
36 - des Hängegurtes
33 - der Wand

zusammen 84 Stäbe.

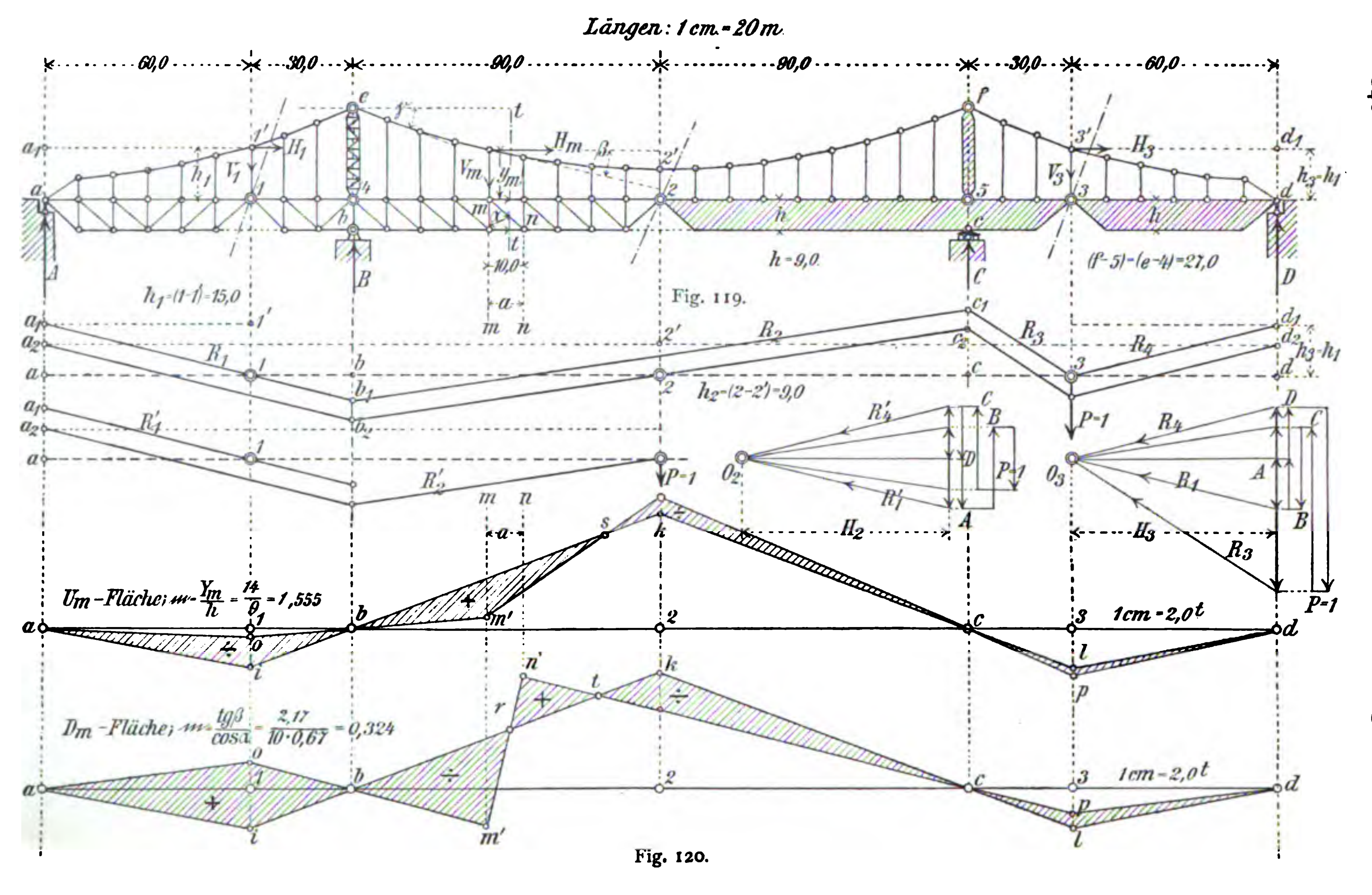


Fig. 119.

Fig. 120.

Denkt man sich die Einzellast P über die Fahrbahn rollen, die im Obergurt des Auslegeträgers liegt, so genügt es, wenn man, um zunächst die Einflußzahlen der äußern Kräfte zu ermitteln, *nur zwei ausgezeichnete Lastpunkte* in Rechnung zieht, nämlich die Gelenkpunkte 2 und 3.

a. Rechnerische Ermittelung der Einflußzahlen der äußern Kräfte. Für die Unbekannten der Stützenkräfte A, B, C, D und der Kettenbogenkraft H stehen die Gleichgewichts-Bedingungen und außerdem *drei* Momentengleichungen für durch die Gelenke 1, 2, 3 gelegte Schnitte zur Verfügung. Mit Bezug auf die Fig. 120 und die darin eingezeichneten Maße und Bezeichnungen erhält man für den Lastpunkt 3:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad A+B+C+D=P\\
&2)\quad 60A+15H=0\\
&3)\quad 180A+90B+9H=0\\
&4)\quad 300A+210B+30C+15H=0\\
&5)\quad 300A+210B+30C-60D=0.
\end{aligned}
$$

Für den Lastpunkt 2 ist Symmetrie der Belastung vorhanden. Man erhält dafür:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad A+B=0{,}5P\\
&2)\quad 60A+15H=0\\
&3)\quad 180A+90B+9H=0.
\end{aligned}
$$

Die berechneten Einflußzahlen sind in der folgenden Tabelle II zusammengestellt.

Tabelle II. Einflußzahlen der äußern Kräfte für $P = 1$.

Lastpunkt	A	B	C	D	H	M_{am}	$Q_{am} = A+B$
d	0	0	0	$+1{,}0$	0	0	0
3	$+5/18$	$-4/9$	$+8/9$	$+5/18$	$-10/9$	$+18\,1/3$	$-1/6$
c	0	0	$+1{,}0$	0	0	0	0
2	$-5/6$	$+8/6$	$+8/6$	$-5/6$	$+10/3$	$-55{,}0$	$+1/2$
b	0	$+1{,}0$	0	0	0	0	0
1	$+5/18$	$+8/9$	$-4/9$	$+5/18$	$-10/9$	$+1\,2/3$	$+1/6$
a	$+1{,}0$	0	0	0	0	0	0

In der Tabelle sind für die weitere Verwendung auch das Moment M_{am} und die Querkraft Q_{am} für ein Feld mn des linken Trägerteiles eingetragen.

b. Graphische Ermittelung der Einflußzahlen mit Hilfe der Mittelkraftlinien.

1. *Die Einzellast P im Gelenk* 3 (Fig. 120 oben). Für den durch das Gelenk 1 gelegten Schnitt muß die Mittelkraft R_1 aller auf den linken Trägerteil wirkenden äußern Kräfte durch dies Gelenk verlaufen. Man verschiebe also die Bogenkraft H_1 in ihrer Richtung, bis sie die Stützenkraft A in a_1 schneidet. Die Mittelkraft von A und H_1 verläuft dann durch die Punkte a_1 und 1.

Für den zweiten Schnitt durch das Gelenk 2 trifft die verschobene Bogenkraft H_1 die Stützenkraft A im Punkte a_2. Die Mittelkraft R_1 behält aber ihre vorher bestimmte Richtung, d. h. sie bleibt parallel zu $\overline{a_1 b_1}$. Im Stützpunkte b kommt die Stützenkraft B hinzu und dadurch ändert sich in b_2 die Richtung der nächstfolgenden Mittelkraft R_2, so daß diese durch das Gelenk 2 verläuft. Die Richtung $\overline{b_2 2}$ schneidet die Stützenlotrechte C im Punkte c.

Im dritten Schnitte (im Gelenk 3) vereinigt sich die Bogenkraft $H_1 = H_3$ mit A zur Mittelkraft R_1, mit A und B zur Mittelkraft R_2. R_2 läuft parallel zur $\overline{b_2 c_2}$ und trifft die C-Richtung in c_1. Durch Hinzutreten der Stützenkraft C wird die Mittelkraft R_3 durch das Gelenk 3 geführt.

Im Stützenpunkte d verhalten sich D und H_3 genau so wie A und $H_1 = H_3$ im Stützpunkte a. Daraus folgt

$$A = D$$

und ferner, daß die Mittelkraft R_4 die Stützenlotrechte D in d_1 treffen muß, wobei d_1 und a_1 in der nämlichen Wagerechten liegen. Die Richtungsänderung zwischen R_3 und R_4 entspricht der Größe der im Gelenk 3 liegenden Einzellast P.

Das *Maß von P* und die gesuchten Größen und Vorzeichen der äußern Kräfte findet man aus einem geschlossenen Krafteck, das mit der *Polweite* $H_1 = H_3$ gezeichnet wird (Fig. 120 rechts). Darin laufen die Polstrahlen parallel zu den betreffenden Mittelkräften (R_1 bis R_4) und geben dabei deren Größe und Richtung an.

2. *Die Einzellast P ruhe im Gelenk* 2. Die Mittelkraftlinien für die Schnitte 1 und 2 sind in der Fig. 120 dargestellt. Dazu gehört das geschlossene Krafteck der Fig. 120 rechts. Mit Bezug auf das Vorhergehende ist diese Darstellung an sich verständlich.

c. Grenzwerte der Stabkräfte.

1. *Die Bogenkraftfläche.* Aus den Gleichgewichts-Bedingungen ergibt sich für H eine Gleichung ersten Grades. Danach läßt sich die Bogenkraftfläche bereits zeichnen, wenn *eine* ihrer Ordinaten in den Lastpunkten

3 oder 1 gegeben ist. In den beiden Fig. 120 (unten) ist die Bogenkraftlinie mit *aiklb* bezeichnet. Mit ihrer Hilfe sollen zuerst die Grenzwerte der Bogenkraft berechnet werden.

Das *Eigengewicht eines* Trägers sei wie folgt geschätzt worden:[1]

für die 90 m weiten Öffnungen: 2,5 t für 1 m Stützweite
- - 180 m weite Mittelöffnung: 6,0 t - 1 m - .

Die *Verkehrslast* betrage 500 kg/qm. Das gibt für 10 m Brückenbreite, bei zwei Hauptträgern

2,5 t für 1 m Stützweite eines Trägers.

Die Einflußflächen ergeben für $P = 1$ t

$$\text{Fl. } aib = \text{Fl. } cld = -\left(90{,}0 \cdot \tfrac{10}{9} \cdot \tfrac{1}{2}\right) = -50 \text{ t}$$
$$\text{Fl. } bkc = +\left(180{,}0 \cdot \tfrac{10}{3} \cdot \tfrac{1}{2}\right) = +300 \text{ t.}$$

Aus dem Eigengewicht allein berechnet sich danach:

$$H_e = +300 \cdot 6 - 2 \cdot 50 \cdot 2{,}5 = 1550 \text{ t.}$$

Aus der Verkehrslast allein:

$$\text{max.} + H_v = 300 \cdot 2{,}5 = 750 \text{ t}$$
$$\text{max.} - H_v = 2 \cdot 50 \cdot 2{,}5 = 250 \text{ t.}$$

Daraus die *Grenzwerte*:

$$\text{max. } H = 1550 + 750 = +2300 \text{ t}$$
$$\text{min. } H = 1550 - 250 = +1300 \text{ t.}$$

2. Die *Stabkräfte des Kettengurts* und *der Hängestangen* sind allein von H abhängig. Sie finden sich am einfachsten aus einem für $H = 1$ gezeichneten Kräfteplane. Die Pendelpfeiler $4—e$ und $5—f$ erleiden je einen Achsendruck V, dessen Grenzwerte aus max. und min. H zu berechnen sind.

$$\text{max. } V = 2300 \cdot 2 \cdot \operatorname{tg}\gamma = 4600 \cdot \frac{27}{70} = 1774 \text{ t}$$
$$\text{min. } V = 1300 \cdot 2 \cdot \operatorname{tg}\gamma = 1003 \text{ t.}$$

3. *Stabkräfte im beliebigen Schnitte tt des Feldes mn.* Für eine beliebige Schnittkraft und einen dieser zugeordneten Momentenpunkt i lautet der analytische Ausdruck der Stabkraft S

$$S = \frac{1}{r}\left(M_{ai} - H_i y_i\right),$$

wenn r den Hebelarm von S, M_{ai} das Moment der lotrechten äußern Kräfte auf i, und y_i den lotrechten Abstand zwischen dem durchschnittenen H_i und dem Punkte i vorstellt.

---

[1] Vergl. die Tabellen im *Anhang* § 11.

Für den Untergurtstab U_m gibt das

$$U_m = \frac{1}{h}(M_{am} - H_m y_m)$$

oder

$$U_m = \frac{y_m}{h}\left(\frac{M_{am}}{y_m} - H_m\right).$$

Danach ist in der Fig. 120 die U_m-Fläche dargestellt worden. Der Multiplikator m berechnet sich zu

$$\mathfrak{m} = \frac{14}{9} = 1,555.$$

Mit Hilfe der Tabelle II findet man die Werte der $\frac{M_{am}}{y_m}$

für Lastpunkt 3: $\frac{+18\frac{1}{3}}{14} = +1,310$

" " 2: $\frac{-55,0}{14} = -3,929$

" " 1: $\frac{1\frac{2}{3}}{14} = +0,119.$[1]

Daraus berechnen sich die *schraffierten* Einflußflächen für $P = 1$ mit:

$$\text{Fl. } bm's = \frac{76,1 \cdot 1,32}{2} = +50,32 \text{ t}$$

$$\text{Fl. } skc = -\frac{103,9 \cdot 0,6}{2} = -31,17 \text{ t}$$

$$\text{Fl. } dlcp = -50 + \left(0,131 \cdot 90 \cdot \frac{1}{2}\right) = +8,95 \text{ t}$$

$$\text{Fl. } aibo = -50 + \left(0,119 \cdot 90 \cdot \frac{1}{2}\right) = -44,65 \text{ t.}$$

Weiter folgen die gesuchten *Grenzwerte von U_m mit*:

$$\max. + U_m = [50,23(6,0 + 2,5) + 8,95(2,5 + 2,5) - 31,17 \cdot 6,0 - 44,65 \cdot 2,5]\frac{14}{9} = +269,12 \text{ t}$$

$$\max. - U_m = [-31,17(6,0 + 2,5) - 44,65(2,5 + 2,5) + 50,23 \cdot 6,0 + 8,95 \cdot 2,5]\frac{14}{9} = -255,70 \text{ t.}$$

4. *Die Wandstabkraft D_m* im Schnitte *tt* bestimmt man am einfachsten aus der Querkraft Q, nach der Gl. (21):

$$D_m = \frac{Q}{\cos\alpha},$$

[1] Diese Ordinate ist in der Fig. 120 der besseren Deutlichkeit halber etwas größer gezeichnet worden.

worin Q die aus der Bogenkraft und den Stützenkräften herrührende Mittelkraft aller auf den betrachteten Trägerteil wirkenden lotrechten äußern Kräfte vorstellt. Es ist (mit Bezug auf die Fig. 120)

$$Q = A + B - V_m$$

oder

$$Q = A + B - H \cdot \operatorname{tg}\beta.$$

Daraus

$$D_m = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha}\left(\frac{A+B}{\operatorname{tg}\beta} - H\right). \tag{49}$$

Danach ist die Einflußfläche für D_m in Fig. 120 (unten) gezeichnet, unter Verwendung der Einflußzahlen der Tabelle II. Man findet die Werte $\frac{A+B}{\operatorname{tg}\beta}$:

für Lastpunkt 3: $\frac{-1 \cdot 10}{6 \cdot 2{,}17} = -0{,}76$ t

- - 2: $\frac{+1 \cdot 10}{2 \cdot 2{,}17} = +2{,}304$ t

- - 1: $\frac{+1 \cdot 10}{6 \cdot 2{,}17} = +0{,}76$ t,

und daraus den Inhalt der *schraffierten* Einflußflächen:

Fl. $dlcp = +50 - (0{,}76 \cdot 90 \cdot \frac{1}{2}) = +15{,}8$ t

Fl. $aibo = +50 + (0{,}76 \cdot 90 \cdot \frac{1}{2}) = +84{,}2$ t

Fl. $bm'r = -45{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot \frac{1}{2} = -56{,}87$ t

Fl. $rn't = +26{,}5 \cdot 1{,}47 \cdot \frac{1}{2} = +19{,}48$ t

Fl. $tkc = -108 \cdot 1{,}03 \cdot \frac{1}{2} = -55{,}62$ t.

Danach berechnen sich die Grenzwerte von D_m:

$$\max. -D_m = 0{,}324[2{,}5(15{,}8 + 84{,}2) + (6{,}0 \cdot 19{,}48) - (6{,}0 + 2{,}5)(56{,}87 + 55{,}62)] = -190{,}9 \text{ t}.$$

Ein max. $+D_m$ findet sich nicht, man erhält

$$\min. -D_m = 0{,}324[(2{,}5 + 2{,}5)(15{,}8 + 84{,}2) + (6{,}0 + 2{,}5)\,19{,}48 - 6{,}0(56{,}87 + 55{,}62)] = -3{,}03 \text{ t}.$$

5. *Die Grenzwerte der Stützenkräfte A und B* (Fig. 121). Sie ergeben sich ohne weiteres aus den Einflußzahlen der Tabelle II und:

$$\max. -A = -(\tfrac{5}{6} \cdot 180 \cdot \tfrac{1}{2})(6{,}0 + 2{,}5) + (2 \cdot \tfrac{5}{18} \cdot 90 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot 60 \cdot \tfrac{1}{2})\,2{,}5 = -500 \text{ t}$$

$$\max. +A = -(\tfrac{5}{6} \cdot 180 \cdot \tfrac{1}{2})\,6{,}0 + (2 \cdot \tfrac{5}{18} \cdot 90 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot 60 \cdot \tfrac{1}{2})(2{,}5 + 2{,}5) = -175 \text{ t}$$

$$\max. +B = +(\tfrac{8}{6} \cdot 180 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot 90 \cdot \tfrac{1}{2})(6{,}0 + 2{,}5) + (\tfrac{8}{9} \cdot 90 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot 30 \cdot \tfrac{1}{2})(2{,}5 + 2{,}5) - (\tfrac{4}{9} \cdot 90 \cdot \tfrac{1}{2})\,2{,}5 = +1627{,}5 \text{ t}$$

$$\min. +B = +(\tfrac{8}{6} \cdot 180 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot 90 \cdot \tfrac{1}{2})\,6{,}0 + (\tfrac{8}{9} \cdot 90 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot 30 \cdot \tfrac{1}{2})\,2{,}5 - \tfrac{4}{9} \cdot 90 \cdot \tfrac{1}{2}(2{,}5 + 2{,}5) = +1027{,}5 \text{ t}.$$

Die negative Stützenkraft A ist durch *Verankerung* der Pendelstütze mit dem Pfeilermauerwerk aufzunehmen. Der Querschnitt der flußeisernen Ankerstäbe muß bei fünffacher Sicherheit und 4,4 t/cm² Zugfestigkeit des Eisens

$$\frac{5 \cdot 500}{4{,}4} = 57 \text{ qcm}$$

gemacht werden.

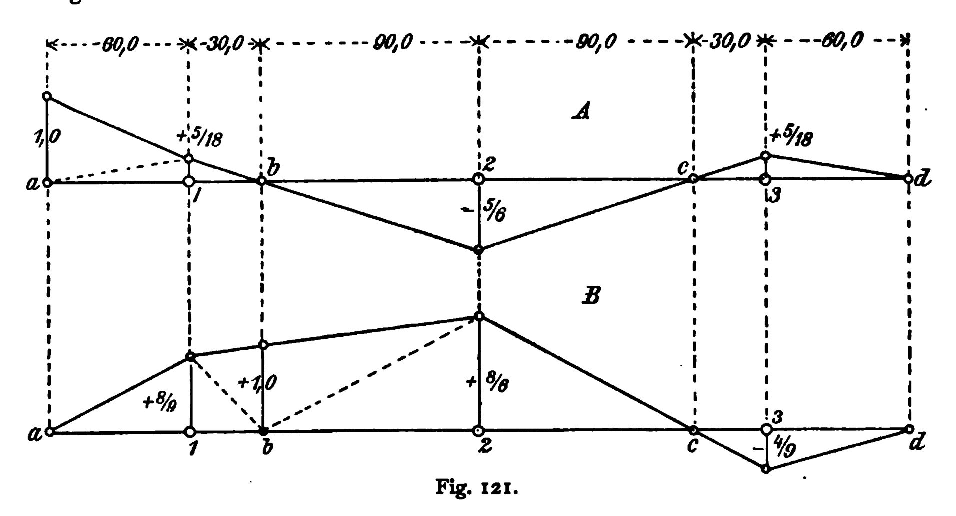


Fig. 121.

32. Ein Auslegebogenträger. Der in Fig. 122 dargestellte Auslegebogenträger auf vier Stützen, mit den Zwischengelenken 1, 2, 3 und den Kämpfergelenken b, c, besitzt vier Scheiben, bedarf also, um mit der Erdscheibe starr verbunden zu werden,

$$(5 - 1)\,3 = 12$$

Verbindungsstäbe. Das sind

5 Gelenke mit 10 Stäben
2 Pendelstützen mit 2 -
zusammen 12 Stäbe.

Die zweite und dritte Scheibe bestehen je aus der oberen Trägerscheibe und 6 freien Knoten. Diese Scheiben sind also für sich starr, weil der Zahl ihrer freien Knoten die doppelte Zahl von Verbindungsstäben $(2 \cdot 6 = 12)$ gegenübersteht.

a. Das Spiel der äussern und innern Kräfte. Man denke sich von der rechten Stütze d aus eine Einzellast P über den Träger rollen und betrachte dabei irgend ein Schnittfeld im Ausleger oder im Bogenschenkel des linken Trägerteils (Fig. 123). Dann ist leicht zu

verfolgen, wie für den Lauf der Last zwischen d und b der unbelastete linke Trägerteil ab spannungslos bleiben muß. Ferner bleibt die Stützenkraft A solange gleich Null, bis P das Gelenk 1 überschritten hat, denn bis dahin besteht für dies Gelenk die Gleichung

$$Al_1 = 0.$$

Daraus folgt, daß in einem Schnittfelde des Auslegers erst dann innere Kräfte entstehen, wenn die Einzellast das betreffende Feld betreten hat.

Dagegen entstehen in einem Schnitte der mittleren Bogenöffnung im allgemeinen bei jeder Lage der Einzellast zwischen d und a Stabkräfte, ausgenommen wenn P in die Lastscheide des betreffenden Stabes fällt. Liegt P auf einem Ausleger — z. B. zwischen den Gelenken 2 und 3 — so sind zunächst die Stützenkräfte A und D gleich Null, weil sonst in den Gelenken 1 und 3 kein Gleichgewicht bestehen kann. Es wirken also nur die beiden Kämpferkräfte K_b und K_c, die mit P zusammen im Gleichgewicht sein müssen. Daher schneiden sich die Richtungen dieser drei Kräfte auf der durch 2 verlaufenden *Richtungslinie* (im Punkte p). Damit ist für jede Lage von P zwischen den Gelenken 1 und 3 die Größe und Richtung der Kämpferkräfte gegeben (**27**).

Weil die Richtung der Bogenkraft H als *positiv* bezeichnet worden ist, wenn P zwischen b und c rollt, so muß H *negativ* werden, falls P auf einen Ausleger übertritt.

b. Einflußflächen der Stabkräfte.

1. *Die Stäbe der Pfeilerversteifung.* Alle Stäbe, die von den freien, außerhalb der Parallelträger-Scheibe liegenden Knoten ausgehen, stehen unter dem alleinigen Einflusse der betreffenden Kämpferkraft. Diese zerlegt sich in die Bogenkraft H und die Stützenkraft B. Man zeichne daher zwei Kraftpläne für $H = 1$ und $B = 1$. Daraus entnehme man das Verhältnis irgend einer Stabkraft S, sowohl zu B als auch zu H. Sind α und β die gefundenen Verhältniszahlen, so ist

$$S = \alpha B + \beta H$$

oder

$$S = \beta\left(\frac{\alpha}{\beta} B + H\right).$$

Man multipliziere also die Ordinaten der Einflußfläche für B mit dem Verhältnis $\frac{\alpha}{\beta}$ und vereinige sie mit der Bogenkraftfläche (**27**, b, 1 u. Fig. 112). Dadurch erhält man die Einflußfläche für S mit dem Multiplikator β.

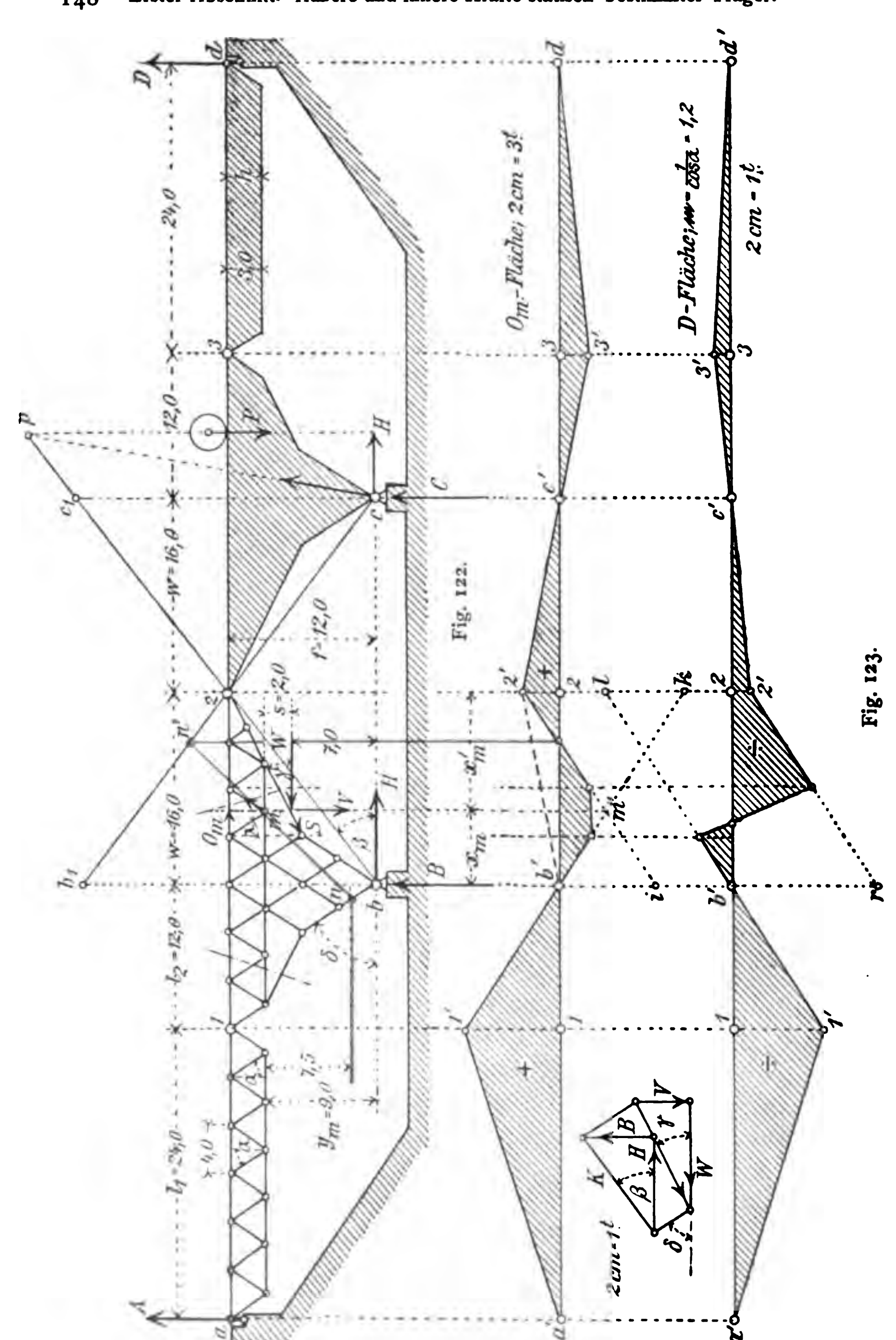


Fig. 122.

Fig. 123.

Für die weiteren Rechnungen brauchen wir die Seitenkräfte W und V der Stabkraft S, die vom Schnitte getroffen wird, der durch den Knoten m der Fig. 122 verläuft. Wir bestimmen W und V für die Lage der Einzellast $P = 1$ im Gelenk 2. Dann ist

$$B = \frac{1}{2}$$

und

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{w}{f} = \frac{2}{3}.$$

Aus einem Plane für $B = 1$ und $H = 1$ findet man leicht (auch rechnerisch)

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{1}{4} B + \frac{3}{8} H = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \\ W &= \frac{1}{2} B + \frac{3}{4} H = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

Diese Einflußzahlen sollen für die Darstellung der Einflußfläche der Obergurtstabkraft O_m verwendet werden.

2. *Obergurtstabkraft O_m im Bogenschenkel.* Durch den Momentenpunkt m der Stabkraft O_m ist ein lotrechter Schnitt gelegt, der außer den drei Stäben des Parallelträgers noch einen vierten Stab im Pfeiler trifft. Die Stabkraft S des vierten Stabes ist im Schnitte in eine wagerechte und eine lotrechte Seitenkraft (W und V) zerlegt. V hat kein Moment in Bezug auf m. Für den linken Trägerteil ist also anzuschreiben:

$$M_m = M_{bm} - H y_m + W s, \quad (51)$$

worin M_{bm} das Moment aller lotrechten Kräfte, y_m und s die betreffenden Hebelarme bedeuten.

Wir benutzen die Gl. (50), um daraus die Einflußzahl für den Lastpunkt 2 zu berechnen. Es ist

$$O_{m2} = -\frac{M_m}{h} = -\frac{1}{h}(B \cdot x_m - H y_m + W s).$$

Setzt man darin die bekannten Zahlenwerte ein, so gibt das:

$$O_{m2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot 6 - \frac{2}{3} \cdot 9{,}0 + \frac{3}{4} \cdot 2{,}0\right) = +\frac{1}{2} t.$$

Die Einflußzahl $+\frac{1}{2}$ ist als Ordinate $2—2'$ in der Fig. 123 (oben) aufgetragen und danach die Einflußlinie $2'—c'—3'—d'$ für den Lauf der Last zwischen dem Gelenk 2 und der Stütze d gezeichnet worden.

Die punktiert gezeichnete Gerade $2'—b'$ gibt für die weitere Fahrt von P zwischen dem Gelenk 2 und der Stützenlotrechten bb_1 den Einfluß der nach dem Gelenk 2 gerichteten Kämpferkraft K_{b2} an. Um also die Einflußlinie für diesen Teil der Fahrt zu erhalten, braucht man — wie dies beim Dreigelenkträger (unter **28**, b) ausführlich begründet wurde — nur noch den Einfluß der in b und im Gelenk 2 entstehenden *Balken*-Stützenkräfte zu ermitteln und deren Ordinaten mit denjenigen der punktiert gezeichneten Einflußlinie $2'b'$ zu addieren. Das ist in Fig. 123 geschehen. Dabei berechnete sich die auf der Stützenlotrechten B abgetragene Strecke $b'i$ aus der Stützenkraft-Einheit mit

$$\overline{b'i} = O'_m = -\left(\frac{1 \cdot x_m}{h}\right) = -\left(\frac{1 \cdot 6}{3}\right) = -2{,}0 \text{ t}.$$

Für die auf der Scheitelgelenk-Lotrechten abzutragende Strecke $2—k$ erhält man

$$O''_m = -\left(\frac{1 \cdot x'_m}{h}\right) = -\left(\frac{1 \cdot 10}{3}\right) = -3\tfrac{1}{3} \text{ t}.$$

Die Grenzlinien $b'k$ und $2'i$ schneiden sich in m' auf der Momentenpunkt-Lotrechten (**18**, a).

3. *Nachprüfung der Lastscheide für O_m.* Aus der Gl. (51) erhält man, abgesehen vom Vorzeichen und für die Fahrt auf dem linken Bogenschenkel:

$$O_m = \frac{1}{h}\left(M_{bm} - Hy_m + Ws\right)$$

oder

$$O_m = \frac{1}{h}\left[M_{bm} - Hy_m + \left(\frac{1}{2} B + \frac{3}{4} H\right) s\right].$$

Trennt man nach lotrechten und wagerechten Kräften, so gibt das, unter Einsetzung der Zahlenwerte,

$$O_m = \frac{1}{3}\left[(M_{bm} + 1 \cdot B) - 7{,}5\, H\right].$$

O_m verschwindet, wenn das Moment der lotrechten gleich dem der wagerechten Kräfte wird, d. h. wenn die Mittelkraft beider, die Kämpferkraft, durch den Momentenpunkt m verläuft. Daraus ergibt sich die in der Fig. 122—123 *rot* dargestellte Art der Nachprüfung, wobei n, der Angriffspunkt der Kämpferkraft, um 7,5 m unter m und 1 m links vom Kämpfer b gelegt worden ist.

4. *Die Strebenkraft D_m im Bogenschenkel.* Weil parallele Gurte vorliegen, so berechnet sich D_m am einfachsten aus der *Querkraft* (**17**, b). Für die Lage $P = 1$ im Gelenk 2 gibt das:

$$D_{m2} = -\frac{1}{\cos\alpha}(B - V).$$

Unter Beachtung der (unter 1) gegebenen Zahlenwerte folgt weiter:

$$D_{m2} = -\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right) = -\frac{1}{8\cos\alpha}\,\text{t}.$$

Danach ist in Fig. 123 die Ordinate 2—2' der Einflußlinie gleich $-\frac{1}{8}$ t gemacht und $\frac{1}{\cos\alpha}$ als Multiplikator eingeführt worden.

Für die Fahrt von $P = 1$ zwischen dem Gelenk 2 und der Stütze b findet sich die Einflußlinie in bekannter Weise. Die Grenzlinien $2'r$ und $b'l$ werden gleich der Lasteinheit gemacht. Sie schneiden sich im Momentenpunkte, der im Unendlichen liegt. Der weitere Verlauf der Einflußlinie in den anstoßenden Öffnungen ist bekannt.

33. Kinematische Darstellung von Einflußflächen. Lesern, denen die Grundlagen der geometrischen Bewegungslehre nicht geläufig sind, ist zu empfehlen, diese im Band I (unter § 12) nachzulesen und sodann zuerst die in § 24 gegebenen Darstellungen von Einflußlinien *einfacher* Fachwerke zu studieren. Die nachfolgenden Beispiele werden ihm dann besser verständlich sein.

a. Einflußflächen der Stabkräfte im allgemeinen. 1. Wir betrachten ein Schnittfeld und die unmittelbar anstoßenden beiden Scheiben. Wird dann ein *Gurt*stab beseitigt, so zählt die erhaltene zwangläufige Kette eine Scheibe mehr, als das gegebene Fachwerk. Beseitigt man dagegen einen *Wand*stab, so treten die Gurtstäbe als Scheiben hinzu, so daß die Kette drei Scheiben mehr aufweist, als das zu behandelnde Fachwerk.

Sobald für jede der beiden an das Schnittfeld stoßenden Scheiben der Pol gefunden ist, um welchen die Scheibe gegenüber der ruhenden Erdscheibe dreht (**24**, a, S. 103), ist die zwischen diesen beiden Polen liegende Einflußfläche eines *Gurt*stabes bestimmt. Sie enthält zwei Grenzlinien, die sich auf der durch den gegenseitigen Pol beider Scheiben geführten Lotrechten schneiden. Je nachdem dieser Pol in den Lastgurt fällt, oder ihm gegenüber liegt, findet unmittelbare oder mittelbare Lastübertragung statt (**4**).

Bei der Darstellung der Einflußfläche eines *Wand*stabes liegen die Verhältnisse etwas anders. Hier gibt es für das Schnittfeld mit den beiden anstoßenden Scheiben zusammen *drei* Grenzlinien, und davon verläuft die mittlere durch eine Lastscheide, die lotrecht unter dem Pole der als *Lastgurt* dienenden Gurtstabscheibe liegt.

2. Um diese allgemeinen (unter **24**, b) bereits begründeten Sätze etwas näher zu erläutern und auch zu erweitern, soll zuerst die Einflußfläche einer *Streben*kraft D gezeichnet werden (Fig. 124—126).

Die an das Schnittfeld stoßenden Scheiben (Fig. 124) sind I und III. Lastgurt ist der Obergurt; deshalb kommt die obere Gurtstabscheibe II besonders in Betracht. Der Pol der Untergurtscheibe IV wird nicht gebraucht. Die Polbestimmungen wurden wie folgt ausgeführt.

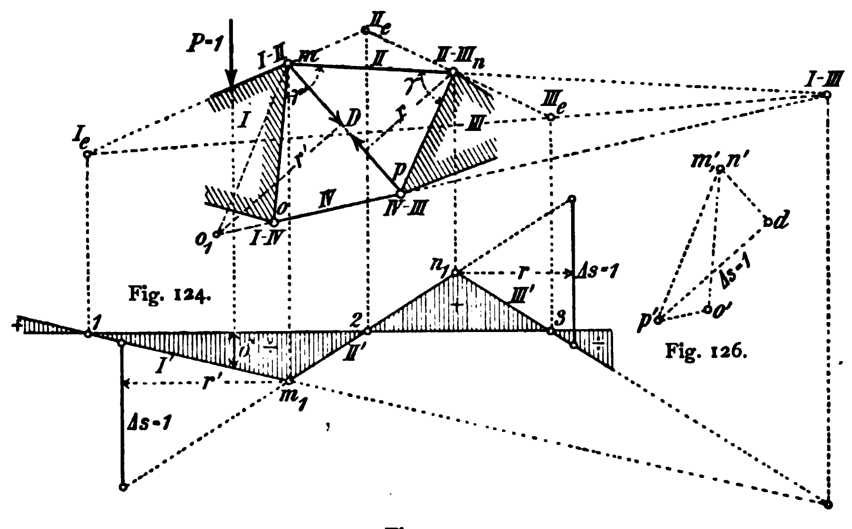


Fig. 125.

Die Lage des Poles I_e wurde angenommen; in besonderem Falle ist sie festzulegen. Es fanden sich dann

Pol I—III im Schnitte der Geraden (I—II) — (II—III) und (I—IV) — (IV—III).

Pol III_e auf der Verbindungsgeraden I_e — (I—III). Er wurde dort beliebig angenommen.

Pol II_e im Schnitte der Geraden I_e — (I—II) und III_e — (II—III).

Lotrecht unter den Polen I_e, II_e, III_e und gleichzeitig in den betreffenden Grenzlinien I', II', III' liegen die Nullpunkte 1, 2, 3 der Einflußfläche (Fig. 125).

Die Richtungen von I' und III' treffen sich auf der Lotrechten des Poles I—III. Das ***Maß für die Einheit von Weg und Kraft*** ist (nach **24**, c, 1) aus

$$r \cdot \Delta\gamma = \Delta s = 1$$

zu finden. Dabei ist $\Delta\gamma$ die Änderung des Winkels γ zwischen den Scheiben II und III. Die zugehörigen Grenzlinien II' und III' haben

also (nach Fig. 107) in einer Entfernung r von ihrem Schnittpunkte n' einen lotrechten Abstand

$$\Delta s = 1.$$

Will man die so gefundene Strecke der Kraft- und Maßeinheit noch einmal nachprüfen, so geschieht dies einfach mit Hilfe der Berechnung der Änderung $\Delta\gamma'$ des Winkels $\Delta\gamma'$, den die Scheiben I und II miteinander einschließen. Man kann $\Delta\gamma'$ wie folgt bestimmen.

In dem Gelenkviereck $mnop$ des Schnittfeldes (Fig. 124) denke man sich die Knoten m und n festgehalten und zeichne so einen Verschiebungsplan (I. **78**, **79**), in welchem die Längenänderung Δs der Strebe D gleich 1 ausfällt. Das ist in der Fig. 126 geschehen. In m und n ist (nach obiger Annahme) die Verschiebung Null. Der Pol des Verschiebungsplanes fällt demnach mit m' und n' zusammen. Knoten p bewegt sich um n als Pol. Seine *um* 90° *gedrehte* Verschiebung $n'p'$ ist parallel zur Geraden np. Diese Verschiebung wähle man so groß, daß ihr Seitenwert nach der Richtung der Strebenkraft D gleich 1 wird. Die Projektion $p'd$ von $\overline{n'p'}$ auf eine zur D-Richtung senkrechte Gerade muß danach gleich 1 gemacht werden, $\overline{n'd}$ also parallel zur $\overline{mp}$. Die Verschiebung des Knotens o ist damit auch festgelegt: $\overline{m'o'} \parallel \overline{mo}$ und $\overline{p'o'} \parallel \overline{po}$. Man findet daraus

$$\Delta\gamma' \cdot \overline{mo} = \overline{m'o'}$$

oder

$$\Delta\gamma' = \frac{\overline{m'o'}}{\overline{mo}}.$$

Überträgt man jetzt den Verschiebungsplan in das Gelenkviereck, indem man von m aus zur Geraden np eine Parallele zieht und die Gurtstabrichtung op verlängert, bis sie diese Parallele in o_1 schneidet, so gilt für die von o_1 auf die Strebenrichtung gefällte Senkrechte r' die Gleichung

$$\frac{\overline{m'o'}}{\overline{mo}} = \frac{1}{r'}.$$

Das gibt

$$\Delta\gamma' = \frac{1}{r'}. \tag{52}$$

Mißt man also, in einer Entfernung r' vom Schnittpunkte m_1 den lotrechten Abstand zwischen den Grenzlinien I' und II', so erhält man dafür

$$\Delta s = 1.$$

Jede Ordinate δ der Einflußfläche ist danach in Längeneinheiten und durch Multiplikation mit $P = 1$ auch in Lasteinheiten abzumessen.

Die *Vorzeichen* der Einflußfläche bestimmen sich für jede ihrer Teilflächen aus dem Vorzeichen der Änderung des Winkels γ zwischen den

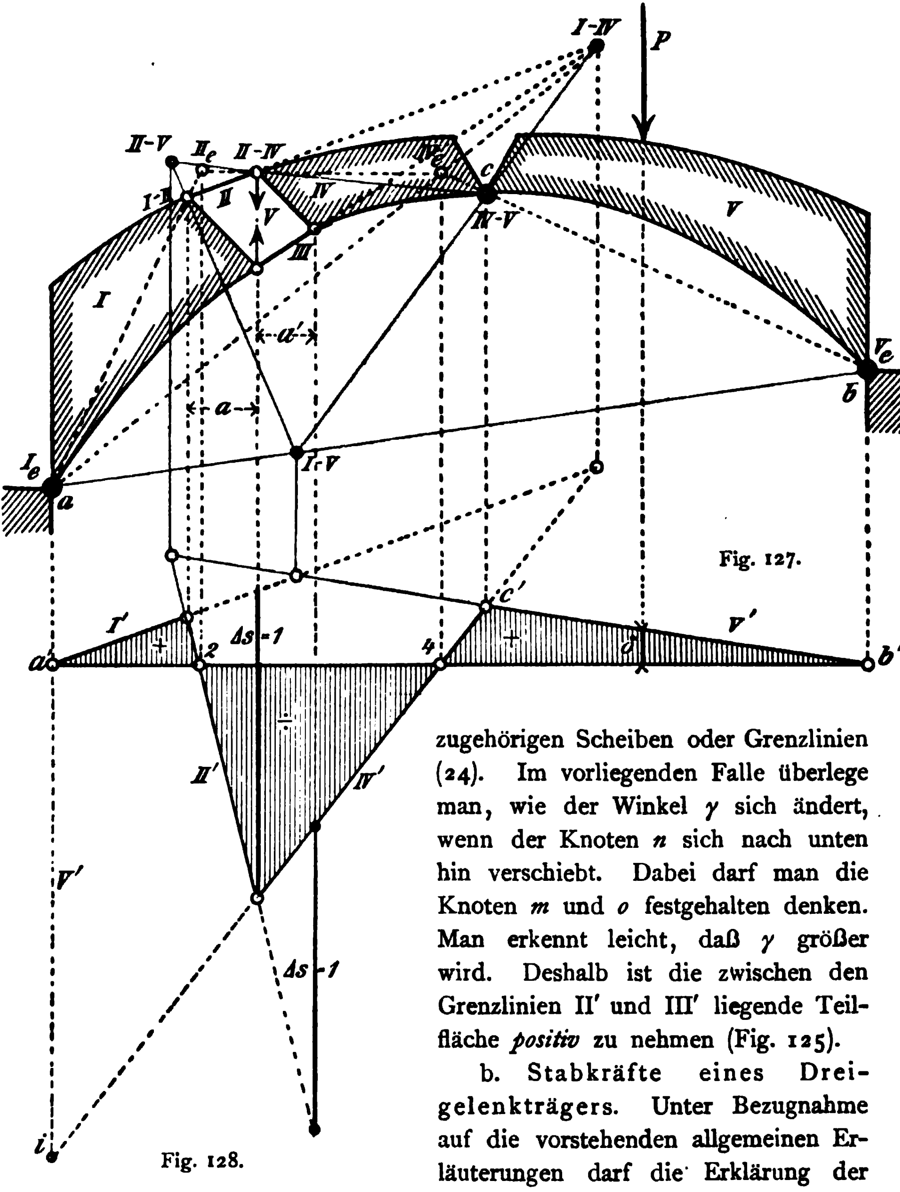


Fig. 127.

Fig. 128.

zugehörigen Scheiben oder Grenzlinien (24). Im vorliegenden Falle überlege man, wie der Winkel γ sich ändert, wenn der Knoten n sich nach unten hin verschiebt. Dabei darf man die Knoten m und o festgehalten denken. Man erkennt leicht, daß γ größer wird. Deshalb ist die zwischen den Grenzlinien II' und III' liegende Teilfläche *positiv* zu nehmen (Fig. 125).

b. Stabkräfte eines Dreigelenkträgers. Unter Bezugnahme auf die vorstehenden allgemeinen Erläuterungen darf die Erklärung der Fig. 127—128, worin die Einflußlinie einer *Ständer*kraft V dargestellt ist, kurz gehalten werden.

Die Pole I_e und V_e sind durch die Kämpferpunkte a und b gegeben. Pol I—IV fand sich im Schnittpunkt der Verlängerungen der Gurtstabrichtungen II und III. Ferner wurden ermittelt:

Pol IV_e im Schnitte der Geraden I_e — (I—IV) und V_e — (IV—V)
- II_e - - - - I_e — (I—II) - IV_e — (II—IV).

Nachdem sämtliche Pollotrechten gezogen worden sind, liegen sowohl die Nullpunkte 2 und 4, als auch die Eckpunkte der Einflußfläche fest (Fig. 128). Die *rot* dargestellten Polbestimmungen dienen zur *Nachprüfung*. Zu diesem Zwecke wurden ermittelt:

Pol I—V im Schnitte der Geraden I_e—V_e und (I—IV) — (IV—V)
- II—V - - - - (I—V) — (I—II) und (IV—V) — (II—IV).

Es müssen demnach führen:

Die Pollotrechte I—IV durch den Schnitt der Grenzlinie I′ und IV′
- - I—V - - - - - I′ - V′
- - II—V - - - - - II′ - V′.

Die *Maß- und Lasteinheit* $\Delta s = 1$ ist gleich dem lotrechten Abstande zwischen I′ und II′ in einer Entfernung gleich der Feldweite a von der Pollotrechten I—II. Weil im betrachteten Gelenkviereck die den Scheiben I und IV entsprechenden Seiten *einander parallel angenommen* worden sind, so kann nach vorigem (unter a, 2) die Lasteinheit auch mit Hilfe der im Untergurt gemessenen Feldweite a' gewonnen werden. Danach ist (in der Fig. 128) der lotrechte Abstand $\Delta s = 1$ zwischen den Grenzlinien II′ und IV′ noch einmal gemessen worden. In beiden Fällen ergab sich das *Maß von* 50 mm.

Auch eine *Nachprüfung* durch Rechnung ist auf verschiedene Weise leicht durchzuführen: Verlängert man z. B. die Grenzlinie IV′, so muß sie auf der Kämpferlotrechten durch a eine Strecke $a'i = V'$ abschneiden (**18**, a). V' ist die für die *Balken*-Stützenkraft $A = 1$ erhaltene Stabkraft. Es ist nach der Fig. 127

$$1 \cdot 72 + V' \cdot 44 = 0$$

oder

$$V' = -\frac{72}{44} = 1{,}636 \text{ t.}$$

Es müßte demnach die Strecke $a'i$ gleich $1{,}636 \cdot 50 = -81{,}8$ mm sein, was auch der Fall ist. — Die *Vorzeichen* der Einflußfläche bestimme man nach dem (unter a, 2) Gesagten.

c. Eine Stabkraft im Fünfgelenkdache (Fig. 129—130). Der in Fig. 118 (unter **30**) bereits behandelte Dachbinder ist mit seinen Hauptmaßen in Fig. 129 wieder dargestellt. Es soll die Einflußfläche der Stabkraft *O* gezeichnet und unter Benutzung der früher bereits berechneten Einflußzahlen nachgeprüft werden.

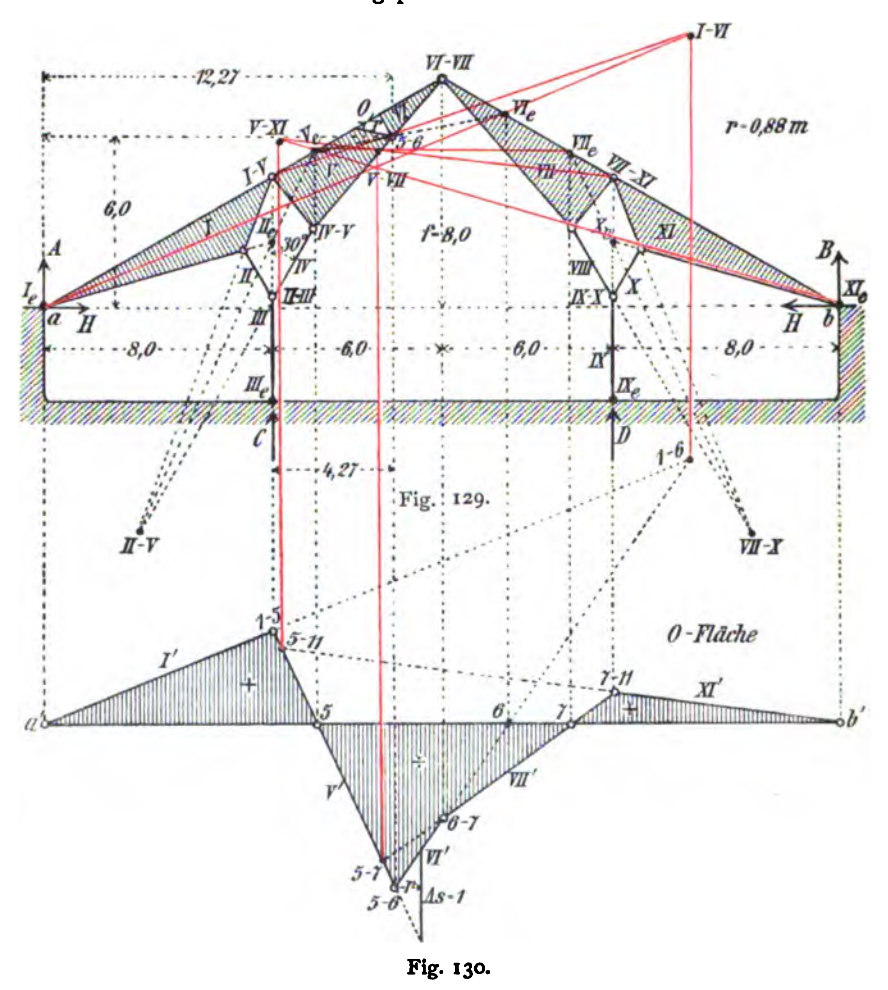


Fig. 130.

Scheiben und Pole sind in bekannter Weise bezeichnet. Es wurden bestimmt:

Pol II—V im Schnitte der Geraden (I—II)—(I—V) und (II—IV)—(IV—V)

- II_e - - - - III_e — (II—III) - I_e — (I—II)

- V_e - - - - (II—V) — II_e - I_e — (I—V).

In gleicher Weise fanden sich die Pole VII—X, X_e und VII_e, ferner Pol VI_e im Schnitte der Geraden V_e—(5-6) und (VI—VII) — VII_e. Durch die so gefundenen Pole war die Einflußfläche festgelegt, wie sie Fig. 130 veranschaulicht. Die dann noch bestimmten Pole haben nur zur Nachprüfung gedient. Die dazu nötigen Geraden wurden durch rote Farbe hervorgehoben. Es fanden sich nacheinander

Pol I—VI im Schnitte der Geraden I_e—VI_e und (I—V) — (V—VI)
- V—VII - - - - V_e—VII_e - (V—VI) — (VI—VII)
- V—XI - - - - V_e—XI_e - (V—VII) — (VII—XI).

Das Maß für die Lasteinheit ergab sich zu 12,5 mm. Danach fanden sich für die Ordinaten der Einflußfläche unter den Knoten 1—5, 6—7 und 7—11 für $P = 1$ durch Abmessen die Werte

$$O_{1-5} = +1{,}0 \text{ t}; \quad O_{6-7} = -1{,}0 \text{ t}; \quad O_{7-11} = +0{,}31 \text{ t}.$$

Die rechnerische Nachprüfung mit Hilfe der (unter **30**) bereits berechneten Stützenkräfte A, B, C, D und der Bogenkraft H ergab, wie aus dem Folgenden zu ersehen ist, die gleichen Werte

$$O_{6-7} = -\frac{1}{r}[0{,}5 \cdot 12{,}27 - 0{,}875 \cdot 6{,}0] = \frac{1}{0{,}88}(0{,}885) = -1{,}0 \text{ t}$$

$$O_{1-5} = -\frac{1}{r}[-0{,}168(28 - 12{,}27) + 0{,}294 \cdot 6{,}0] = \frac{1}{0{,}88}(0{,}878) = +1{,}0 \text{ t}$$

$$O_{7-11} = -\frac{1}{r}[-0{,}168 \cdot 12{,}27 + 0{,}294 \cdot 6{,}0] = +\frac{1}{0{,}88}(0{,}297) = +0{,}33 \text{ t}.$$

Zweiter Abschnitt.

Vollwandbogenträger, Gewölbe und Stützmauern.

Im vorliegenden Abschnitte handelt es sich hauptsächlich um die Berechnung der Spannungen in *krummen* Vollwandträgern. Denn die äußern Kräfte der geraden Träger sind bereits im ersten Bande (§ 8 und § 9), sowie auch im vorhergehenden Abschnitte I, besprochen worden. Außerdem wurden im 4. Abschnitte des ersten Bandes die Grundlagen für die Berechnung der Spannungen *gerader* Vollwandträger gegeben. Dabei wurde (S. 277) vorbemerkt, daß das Wesentliche in der Berechnung *krummer* Stäbe sich auf die Berechnung gerader Stäbe zurückführen ließe. Das soll vor der in § 7 folgenden Behandlung des vollwandigen Dreigelenkträgers jetzt ausführlich nachgewiesen werden.

§ 6. Einleitung.

34. Dehnungen und Spannungen in krummen Stäben.

a. Dehnung einer beliebigen Faser. Man zerlege den Stab (Fig. 131) an beliebiger Stelle durch einen Querschnitt tt in zwei Teile oa und ob, wobei oa und ob die betreffenden Strecken der Stabachse bezeichnen. Die Mittelkraft R aller auf einen der beiden Teile, z. B. auf den Teil oa wirkenden äußern Kräfte sei R.

Kraftebene und Krümmungsebene sind (für ebene Träger) gleichbedeutend und die Querschnittsebene verläuft durch den Mittelpunkt c der Krümmung im Punkte o.

Der Krümmungshalbmesser oc sei ϱ; eine Tangente ZZ in o schließe mit der U-Achse den Winkel φ ein. Dann bildet der Krümmungshalbmesser mit der V-Achse ebenfalls den Winkel φ.

Der Abstand om des Angriffspunktes der Mittelkraft R vom Schwerpunkte o sei v.

Wir setzen voraus, *daß in jedem Querschnitt die Kraftlinie mit einer Hauptachse* (I. **90**) *zusammenfällt.* In diesem Falle wird die Stabachse auch nach erfolgter Formänderung in der Kraftebene verbleiben, sie bleibt also, wie vorausgesetzt, eine ebene Linie.

Neben o, in der Entfernung $oo' = ds$ (in Bogenmaß gemessen), legen wir jetzt durch den Achsenpunkt o' einen Nachbarquerschnitt $t't'$ und betrachten nach erfolgter Formänderung beide Querschnitte in ihrer gegenseitigen Lage (Fig. 132). Im besondern betrachten wir eine beliebige Stabfaser im Abstande y von der Stabachse. Vor ihrer Form-

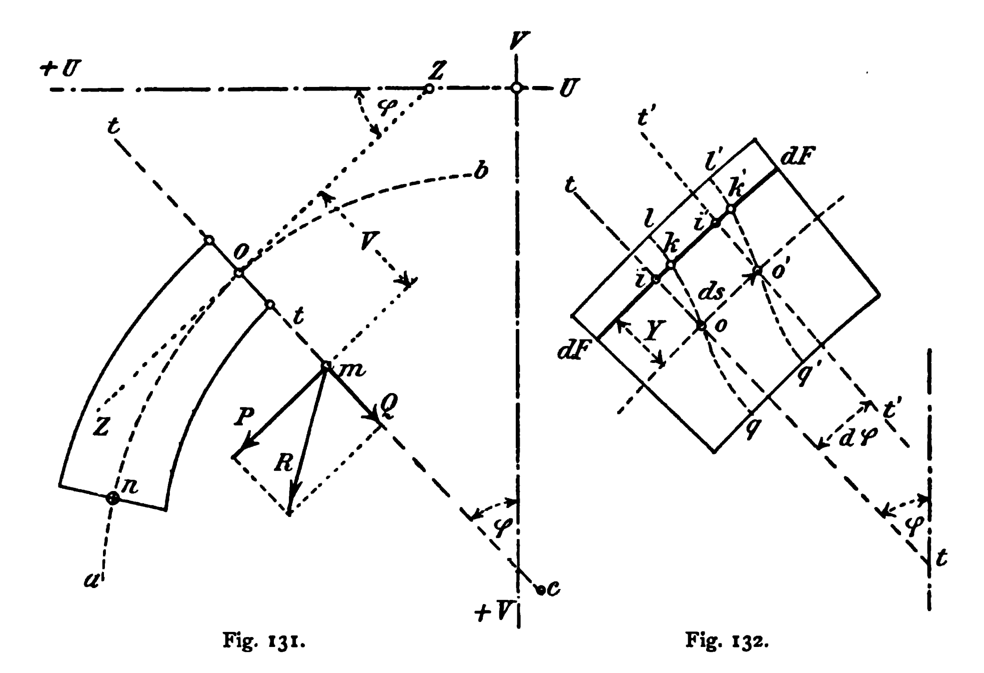


Fig. 131. Fig. 132.

änderung hatte die Faser eine Länge $dl = ii'$ und nach erfolgter Stabbiegung ist ihre Länge kk' geworden. Wir wollen nicht voraussetzen, daß die beiden Querschnitte bei der Biegung *eben* bleiben (I. **103**, b). Ihre Schnittlinien mit der Kraftebene mögen *eine Krümmung annehmen*, wie sie in der Fig. 132 durch die Linien ql und $q'l'$ dargestellt ist. Um aber zu einer einfachen Lösung unserer Aufgabe zu gelangen, wollen wir annehmen, daß *die Verschiebungen ik und $i'k'$ der Faserpunkte i und i' bei der Biegung immer gleich groß ausfallen.* Eine solche Annahme steht mit den Ergebnissen vorliegender Versuche nicht im Widerspruch.

Aus obiger Annahme ergibt sich

$$kk' = ii',$$

d. h. in Worten: *In der Kraftebene gemessen ist die Längenänderung einer Faser im Abstande y gleich der Änderung der Entfernung zwischen den Faserpunkten i und i' der beiden ursprünglichen geraden Querschnittslinien tt und $t't'$.*

Die ursprüngliche Länge der Faser war dl, ihre Längenänderung *während der Biegung innerhalb der Proportionalitätsgrenze* (I. 4, c) sei Δdl. Dann ist zunächst

$$dl = ds + y \cdot d\varphi,$$

wenn $d\varphi$ der von den Querschnittslinien tt und $t't'$ eingeschlossene differentiale Winkel ist.

Unter der weitern (und zulässigen) Annahme, daß der Abstand y während der Formänderung unveränderlich bleibt, erhält man daraus:

$$\Delta dl = \Delta ds + y \Delta d\varphi .$$

Danach darf die *Dehnung* α der Faser (nach I. Gl. (3), S. 8) mit

$$\alpha = \frac{\Delta dl}{dl} = \frac{\Delta ds + y \Delta d\varphi}{ds + y d\varphi}$$

angeschrieben werden.

Es ist aber

$$ds = \varrho d\varphi,$$

also auch

$$\alpha = \frac{\Delta ds + y \Delta d\varphi}{ds + y \dfrac{ds}{\varrho}}$$

oder

$$\alpha = \left(\frac{\varrho}{\varrho + y}\right)\left(\frac{\Delta ds}{ds} + y \frac{\Delta d\varphi}{ds}\right). \tag{53}$$

b. Allgemeiner Ausdruck für die Normalspannung. Die im Punkte m der tt angreifende Mittelkraft R zerlege man in eine *Längskraft* P und eine *Querkraft* Q, wie dies in der Fig. 132 dargestellt ist.

P sei negativ oder positiv, je nachdem es dem betrachteten Querschnitte zugekehrt oder abgekehrt gerichtet ist. Q sei negativ oder positiv, je nachdem es nach dem Krümmungsmittel c oder entgegengesetzt gerichtet ist. Daraus folgt, daß für den betrachteten linken Bogenteil ein rechtsdrehendes Moment positiv, ein linksdrehendes negativ anzuschreiben sein wird.

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen des I. Bandes (§ 15) erhält man danach die Gleichgewichts-Bedingungen:

$$P = \int \sigma \cdot dF$$
$$M = P \cdot v = \int \sigma \cdot y \cdot dF. \tag{54}$$

Darin ist, wie bekannt, σ die *Normalspannung*.

Nach dem Elastizitätsgesetz (I. Gl. 3) erhält man aus der Gl. (53)

$$\sigma = \left(\frac{E \cdot \varrho}{\varrho + y}\right)\left(\frac{\varDelta ds}{ds} + y \frac{\varDelta d\varphi}{ds}\right). \tag{55}$$

Setzt man diesen Wert von σ in die Gleichungen (54), so gibt das

$$\frac{P}{E} = \frac{\varDelta ds}{ds}\int \frac{\varrho \cdot dF}{\varrho + y} + \frac{\varDelta d\varphi}{ds}\int \frac{\varrho(y dF)}{\varrho + y}$$
$$\frac{M}{E} = \frac{\varDelta ds}{ds}\int \frac{\varrho(y \cdot dF)}{\varrho + y} + \frac{\varDelta d\varphi}{ds}\int \frac{\varrho(y^2 dF)}{\varrho + y}.$$

Die Integrale sind dadurch zu lösen, daß man den Bruch $\frac{\varrho}{\varrho + y}$ in eine unendliche Reihe verwandelt.

$$\frac{\varrho}{\varrho + y} = 1 - \frac{y}{\varrho} + \frac{y^2}{\varrho^2} - + - + \cdot$$

Es genügt, von der Reihe nur so viele Glieder zu nehmen, daß das Restglied $y^2 dF$ enthält. Das gibt

$$\int \frac{\varrho dF}{\varrho + y} = \int dF - \frac{1}{\varrho}\int y dF + \frac{1}{\varrho}\int \frac{y^2 dF}{\varrho + y}$$
$$\int \frac{\varrho \cdot y \cdot dF}{\varrho + y} = \int y \cdot dF - \int \frac{y^2 dF}{\varrho + y}.$$

Setzt man ferner das Integral

$$\int \frac{\varrho y^2 dF}{\varrho + y} = J_0,$$

so erhält man, weil $\int y dF = 0$,

$$\int \frac{\varrho dF}{\varrho + y} = F + \frac{J_0}{\varrho^2}$$
$$\int \frac{\varrho y dF}{\varrho + y} = -\frac{J_0}{\varrho}.$$

Die Gleichgewichts-Bedingungen (54) lassen sich dadurch vereinfachen:

$$\frac{P}{E} = \frac{\varDelta ds}{ds} F - \left(\frac{\varDelta d\varphi}{ds} - \frac{\varDelta ds}{\varrho ds}\right)\frac{J_0}{\varrho}$$
$$\frac{M}{E\varrho} = \left(\frac{\varDelta d\varphi}{ds} - \frac{\varDelta ds}{\varrho ds}\right)\frac{J_0}{\varrho}.$$

Man findet dann leicht

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{P}{EF} + \frac{M}{EF\varrho} \tag{56}$$

und

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{P}{EF\varrho} + \frac{M}{EJ_0} + \frac{M}{EF\varrho^2}. \tag{57}$$

Schließlich erhält man durch Verbindung der Gl. (56) und (57) mit der Gl. (55) den gesuchten Ausdruck für die *Normalspannung*

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{F\varrho} + \frac{M\varrho y}{J_0(\varrho + y)}. \tag{58}$$

Beim Ersatz von M durch das Produkt $P \cdot v$ geht die Gleichung über in

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{v}{\varrho} + \frac{v\varrho y F}{J_0(\varrho + y)}\right). \tag{59}$$

35. Angenäherte Berechnung der Spannungen in krummen Stäben.

a. Normalspannungen. Wenn man den Ausdruck für J_0

$$J_0 = \int \frac{\varrho y^2 dF}{\varrho + y}$$

durch Einsetzen der unendlichen Reihe für $\dfrac{\varrho}{\varrho + y}$ auflöst, so erhält man

$$J_0 = \int\left(y^2 - \frac{y^3}{\varrho} + \frac{y^4}{\varrho^2} - + - + \cdots\right) dF$$

oder, wenn man darin $\int y^2 dF = J_x$ schreibt,

$$J_0 = J_x - \frac{1}{\varrho}\int y^3\left(1 - \frac{y}{\varrho} + \frac{y^2}{\varrho^2} - + -\right) dF.$$

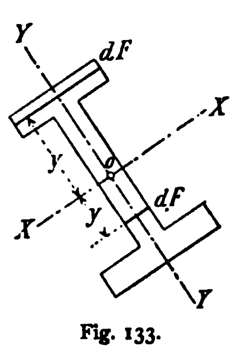


Fig. 133.

In praktischen Fällen bilden *symmetrische Querschnitte* die Regel (Fig. 133). Für Querschnitte, die *in Bezug auf die X-Achse* symmetrisch sind, verschwinden alle mit ungeradem Exponenten behaftete Glieder von y, weil deren Summe aus zwei gleich großen, aber verschiedene Vorzeichen tragenden Teilen besteht. Für solche praktische Fälle darf man also

$$J_0 = J_x + \frac{1}{\varrho^2}\int y^4\left(1 + \frac{y^2}{\varrho^2} + \frac{y^4}{\varrho^4} + \cdots\right) dF$$

anschreiben.

Ist in solchen Fällen *die Querschnittshöhe klein gegenüber dem Krümmungshalbmesser*, so darf man genau genug den zweiten Summanden von J_0 vernachlässigen. Dann gehen die Gl. (56) und (57) über in

$$\frac{\Delta\, ds}{ds} = \frac{P}{EF}$$

$$\frac{\Delta\, d\varphi}{ds} = \frac{M}{EJ} \qquad (60)$$

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{My}{J_x}.$$

Die letzte dieser Gleichungen ist derselbe Ausdruck, wie er im I. Bande (§ 15 und § 16) für den *geraden Stab* abgeleitet worden ist. Er wird im folgenden an Stelle des genauen Ausdruckes der Gl. (59) immer gebraucht werden, sobald es sich um die *Berechnung von Bogenträgern* handelt, denn deren Abmessungen und Krümmungen erfüllen in der Regel die Voraussetzungen, unter denen die angenäherte Rechnung zulässig ist. Vgl. das Beispiel unter **42**, b.

b. Spannungslinie und Nulllinie. In einem gegebenen Falle läßt sich mit Hilfe des allgemeinen Ausdruckes der Gl. (59) für die Normalspannung die in der Kraftebene liegende *Spannungslinie s* (I. **106**) darstellen (Fig. 134). Man erhält sie als eine Hyperbel, deren eine Asymptote $z'z'$ durch das Krümmungsmittel c verläuft. *Dabei fällt ihr Nullpunkt n nicht mit dem Schwerpunkte o des Querschnittes zusammen*, wie nachzuweisen bleibt.

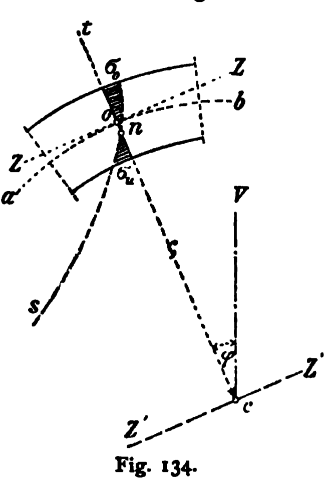


Fig. 134.

Die *Lage der Nulllinie* folgt aus der Gl. (59) für $\sigma = 0$ mit

$$y_n = -\frac{\varrho + v}{\varrho + v + \frac{v\varrho^2 F}{J_0}}, \qquad (61)$$

wenn y_n den Abstand des Nullpunktes n vom Schwerpunkte o vorstellt. Für keinen Wert von v wird also $y_n = 0$, selbst nicht für $v = \infty$, d. h. also für den Fall *der reinen Biegung* (I. **103**), wobei eine unendlich kleine Längskraft an unendlich großem Hebelarm wirkt.

Wenn die Längskraft verschwindet, aber nicht das Moment, d. h. also *wenn R parallel zur betrachteten Querschnittsebene verläuft*, folgt für die Lage der Nulllinie aus der Gl. (59)

$$v_n = -\frac{J_0 \varrho}{J_0 + F\varrho^2}. \qquad (62)$$

Auch in diesem Falle geht die Nulllinie nicht durch den Schwerpunkt des Querschnittes. Man darf aber annehmen, daß dies genau genug geschieht, *wenn ϱ gegenüber der Querschnittshöhe sehr groß ist*, so daß angenähert (nach Gl. 60), und für $P = 0$

$$\sigma = \frac{My}{Jx}$$

angeschrieben werden kann. Es dürfen dann, mit andern Worten, *die Spannungen des krummen Stabes genau genug wie bei einem geraden berechnet werden*. Vergl. das Beispiel unter **42**, b.

c. Schubspannungen. Bei der Berechnung von Bogenträgern fallen die Querkräfte Q gegenüber den Längskräften P in der Regel sehr klein aus (**36**, b). Deshalb erscheint es hier, im Vergleich zu *geraden* Trägen, um so mehr zulässig, die Schubspannungen zu vernachlässigen. Jedenfalls darf man sie, falls man sie zu berücksichtigen hat, für entsprechende Werte von ϱ genau genug nach den im I. Bande (**114**—**116**) entwickelten Formeln für gerade Stäbe berechnen. Dabei wird es nicht immer notwendig sein, eigentliche *Querschnitte* zu legen, deren Ebene also durch das Krümmungsmittel der Bogenlinie verläuft. Denn es gibt manche vollwandige Bogenträger (Fig. 135), deren Berechnung einfacher mit Hilfe von *lotrechten Schrägschnitten* ausgeführt wird. Deshalb wird weiterhin zwischen *Bogenquerkraft* und *Balkenquerkraft* unterschieden, je nachdem die in den Schnitt fallende äußere Kraft *bogenrecht*, d. h. senkrecht zur Bogenmittellinie gerichtet ist oder lotrecht steht.

36. Beziehungen zwischen den äußern Kräften. Im wesentlichen gelten auch hier die beim gegliederten Dreigelenkbogen bereits erläuterten Beziehungen zwischen *Kämpferkraft K*, *Kämpferlinienkraft H'*, *Bogenkraft H* und den *Balkenstützenkräften A*, *B*. Einige weitere Beziehungen folgen.

a. Momente und Bogenkraft.

1. Durch die Wand eines an beiden Enden beliebig gestützten Bogenträgers werde ein lotrechter Schnitt $t't'$ geführt (Fig. 135). Es soll für lotrechte Belastung das Moment für den Punkt k des Schnittes berechnet und graphisch dargestellt werden. a und b, die Angriffspunkte der Kämpferkräfte K_a und K_b, seien bekannt. Bei Gelenkstützen sind sie gegeben, bei Einspannungen (wie z. B. beim Tonnengewölbe) sind sie auf *statisch unbestimmtem* Wege zu finden. Man denke jetzt die Kämpferkraft K_a in die Balkenstützenkraft A und die Kämpferlinienkraft H' zerlegt, sowie auch eine *Mittelkraftlinie* gezeichnet (I. **58**, **59**). Diese treffe den Schnitt tt im Punkte c. Dann wird, unter der Voraussetzung

einer *stetig* wirkenden Belastung, die Mittelkraft R aller auf den linken Bogenteil wirkenden äußern Kräfte die Mittelkraftlinie im Punkte c berühren. Dagegen würde die Richtung von R mit der vom Schnitte tt getroffenen Seileckseite zusammenfallen, wenn nur *Einzellasten* in Berechnung gezogen werden sollten. In der Fig. 135 ist stetige Belastung vorausgesetzt.

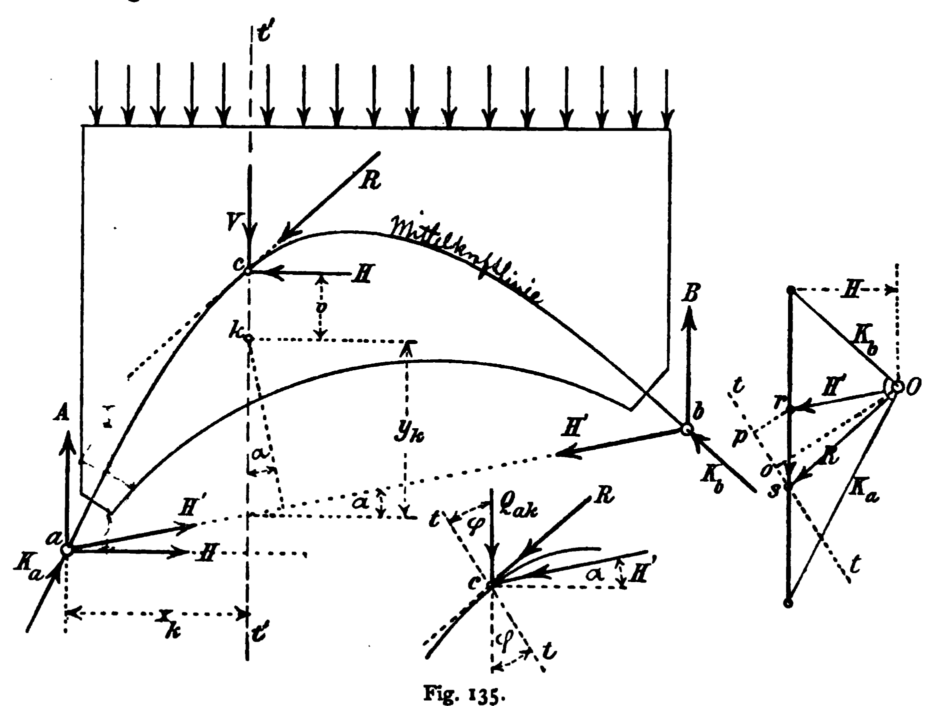


Fig. 135.

Man zerlege weiter R in zwei Seitenkräfte, von denen eine wagerecht und die andere lotrecht gerichtet ist. Jene ist also die Bogenkraft H, diese heiße V. Die äußern Kräfte A, H', V und H halten den linken Bogenteil im Gleichgewicht. Mit Bezug auf die in der Fig. 135 eingeschriebenen Hebelarme darf demnach angeschrieben werden

$$A \cdot x_k - H' \cdot y_k \cdot \cos\alpha - \sum P_m \cdot x_m - H \cdot v = 0 .$$

Es ist aber das gesuchte Bogenmoment

$$M_k = A \cdot x_k - H' \cdot y_k \cdot \cos\alpha - \sum P_m \cdot x_m .$$

Das gibt mit

$$M_k = H \cdot v \tag{63}$$

eine wichtige *Beziehung zwischen dem Bogenmoment und der Bogenkraft.*

Bezeichnet man, wie es beim gegliederten Dreigelenkträger immer geschehen ist, das Moment der lotrecht wirkenden äußern Kräfte für sich mit M_{ak}, so erhält man auch

$$M_{ak} = A \cdot x_k - \sum P_m \cdot x_m$$

oder

$$M_k = M_{ak} - H' \cdot y_k \cdot \cos\alpha \,.$$

Das ist aber

$$M_k = M_{ak} - H y_k \,, \tag{64}$$

wenn y_k den lotrechten Abstand des Momentenpunktes von der Kämpferlinie bedeutet. Das ist die bereits von der Berechnung des gegliederten Dreigelenkbogens her *bekannte Beziehung zwischen Balkenmoment, Bogenmoment und Bogenkraft.*

2. *Graphisch* ergeben sich obige Beziehungen unmittelbar aus der Betrachtung des Kraftecks und der damit gezeichneten Mittelkraftlinie der Fig. 135. Die von der Kämpferlinie ab als Schlußlinie und der Mittelkraftlinie acb begrenzte Fläche stellt die mit der Polweite H gezeichnete Momentenfläche eines einfachen *Balkens* auf den Stützen a und b dar. Daraus folgt

$$M_{ak} = H(v + y_k) \,.$$

Wie bewiesen, ist aber

$$M_k = M_{ak} - H y_k \,,$$

woraus nochmals

$$M_k = H \cdot v$$

erhalten wird.

b. Bogenquerkraft und Balkenquerkraft.

1. Wenn man den allgemeinen Fall der Fig. 135 beibehält und die Mittelkraft R im Punkte c etwas anders wie vorher zerlegt, erhält man daraus eine Beziehung zwischen der Bogenquerkraft Q und der Balkenquerkraft Q_{ak}. Man zerlege R nach der Richtung der Kämpferlinie und lotrecht. Die lotrechte Seitenkraft ist dann gleich der Balkenquerkraft Q_{ak}, weil die andere Seitenkraft der Kämpferlinienkraft H' gleich sein muß. Legt man jetzt noch einen *zweiten Schnitt* durch k, der gegen den ersten um den Winkel φ verdreht liegt, so braucht man, um für den neuen Schnitt die Bogenquerkraft Q zu erhalten, nur Q_{ak} und H' entsprechend zu zerlegen (Fig. 135 unten). Die Summe der dadurch erhaltenen Kräfte gibt

$$Q_k = Q_{ak} \cos\varphi - H' \sin(\varphi - \alpha) \,,$$

worin α der bekannte Winkel zwischen den Richtungen H und H' ist. Führt man dazu noch die Beziehung

$$H' \cos\alpha = H$$

ein, so erhält man schließlich

$$Q_k = Q_{ak} \cos\varphi - H\left(\frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha}\right).$$

Für *wagerechte* (oder nahezu wagerechte) Kämpferlinie verschwindet α. Das gibt

$$Q_k = Q_{ak} \cos\varphi - H \sin\varphi$$

oder

$$Q_k = \sin\varphi\,(Q_{ak} \operatorname{cotg}\varphi - H). \tag{65}$$

Diese Beziehung zwischen Bogenquerkraft, Balkenquerkraft und Bogenkraft gilt für beliebige *Schrägschnitte*, also auch für eigentliche *Querschnitte*, die senkrecht zur Bogenmittellinie stehen.

2. *Graphisch* erhält man Q_k aus Q_{ak}, wie es in der Fig. 135 rechts veranschaulicht ist. R ist im Krafteck der zur Tangente an die Mittelkraftlinie parallele Strahl. Zwischen den Strahlen für H' und R liegt also $Q_{ak} = \overline{rs}$. Ist $t'r$ die Richtung des um φ gegen die Lotrechte gedrehten Schnittes, so hat man auf diese Richtung die Strecken rs und os zu projizieren. Die Differenz der Projektionen giebt

$$Q_k = \overline{so'}.$$

c. Längskraft und Achsenkraft. Das Gewicht der Belastung zwischen dem Scheitel und einem unter dem Winkel φ gegen die Scheitellotrechte geneigten Querschnitte sei V, H die Bogenkraft, R die Mittelkraft beider und P die Längskraft. Dann ist (mit Bezug auf Fig. 135)

$$P = R\cos\gamma$$

und

$$R = \sqrt{V^2 + H^2},$$

wenn γ den Winkel bedeutet, den R und P miteinander einschließen.

Der Angriffspunkt (Stützpunkt) von R fällt im allgemeinen außerhalb des Bogenmittels m und das Schwerpunktmoment ist

$$M = Pv,$$

wenn v den Abstand des Stützpunktes (I. **64**, b) vom Achsenpunkte bedeutet. Wenn aber die Bogenachse mit der Mittelkraftlinie der Belastung zusammenfällt, so wird $v = 0$ und die Längskraft geht in die Achsenkraft P über, deren Richtung die Bogenachse in m berührt. In diesem Falle (Fig. 135) ist auch $\gamma = 0$ und

$$P = R = \frac{V}{\sin\varphi}, \tag{66}$$

$\sin\varphi$ ist aus der Gleichung der Bogenachse zu berechnen:

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Danach ist

$$P = \frac{V\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

anzuschreiben.

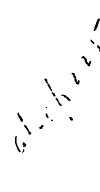
Für eine Parabel der Gleichung

$$y = \frac{4f}{l^2}x(l-x)$$

und für eine gleichmäßig über die Einheit der Stützweite verteilte Last q gibt das z. B.

$$P = \frac{q\left(\frac{l}{2}-x\right)}{4fl^2}\sqrt{16f^2+\frac{l^4}{(l-2x)^2}}.$$

Vergl. das Beispiel unter **42**.



37. Zur Berechnung der Randspannungen aus den Momenten. Es ist dem Leser zu raten, vor dem Studium dieser Nummer die im ersten Bande (**104**, **106**, **112**) gegebenen ausführlichen Darlegungen über *Randspannungen*, *Kernweite* und *Kernmomente* durchzulesen, weil auf viele dabei berührte Einzelheiten hier verwiesen werden muß.

a. Schwerpunkts- und Kernmomente. Die Berechnung der Randspannungen der Vollwandbogenträger wird zweckmäßig mit Hilfe von Einflußflächen bewirkt. Das kann auf zweierlei Art geschehen: Entweder benutzt man dazu das auf den *Schwerpunkt* des betrachteten Schnittes bezogene Moment M_m — dies soll das *Schwerpunkts-Moment* genannt werden — oder das *Kernmoment* M_k. Unter der Annahme, daß die Spannungen des vorliegenden krummen Trägers wie die eines *geraden* berechnet werden dürfen, erhält man für die Randspannung σ eines beliebigen Querschnittes genau genug:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M_m y_r}{J_x}$$

und

$$\sigma = \frac{M_k}{F\cdot k}. \tag{67}$$

Darin bedeuten, wie nach vorigem bekannt ist,

P die Längskraft,

F, J_x Flächeninhalt und Trägheitsmoment des Querschnittes,

y_r Abstand einer Randfaser vom Schwerpunkte m,

k eine der beiden Kernweiten.

Ist v der Abstand der Längskraft vom Schwerpunkte m, so ist

$$M_m = Pv\,,$$

so daß Gl. (60) auch in der Form

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{v\,y_r}{r_x^2}\right)$$

gegeben werden kann, wenn r_x der *Trägheitshalbmesser* des Querschnittes ist (I. **95**, a). Zu beachten bleibt aber, daß *bei nicht symmetrischen Querschnitten die X-Achse, für welche J_x und r_x gelten, die der Kraftlinie zugeordnete Schwerachse ist und daß die Y-Achse zu dieser senkrecht steht* (I. Gl. 109).

Am bequemsten erhält man die Grenzwerte der Randspannungen aus den Kernmomenten M_k, denn die Gl. (67) zeigt, daß die Ordinaten der M_k-Fläche den zugehörigen Spannungen proportional sind. Danach kann eine M_k-Fläche auch als Einflußfläche der zugehörigen Randspannung betrachtet werden, wenn man in diesem Falle den *Multiplikator* $\frac{1}{F \cdot k}$ hinzufügt.

Sind y_o und y_u die Abstände der äußern und innern Randfaser, so erhält man für die zugehörigen Randspannungen

$$\sigma_o = \frac{1}{F \cdot k_o}\,(M_{k\,o})$$

und

$$\sigma_u = \frac{1}{F \cdot k_u}\,(M_{k\,u})\,, \qquad (68)$$

wobei (nach I. **112**) *Moment und Kernweite auf den dem betrachteten Randpunkte (o und u) gegenüberliegenden Kernpunkt (o' und u') zu beziehen sind.*

Schließlich bleibt wohl zu beachten, daß es gleichgültig ist, ob man ein Moment M_m oder M_k aus einem *durch den Momentenpunkt gelegten Querschnitt tt oder Schrägschnitt t't'* berechnet (Fig. 135). In jedem der beiden Fälle erhält man ein gleich großes Moment. Auch ist es im allgemeinen gleichgültig, für welchen der beiden gedachten Schnitte man die Spannungen ausrechnen will. Für *Steingewölbe* und auch für *Eisenbögen*, auf welche die Lasten durch Ständer mittelbar übertragen werden, können die in der Nähe der Kämpfer liegenden Randspannungen nur aus Querschnitten bestimmt werden.

b. Unterlagen für angenäherte Rechnungen. Bei gegebenen Bogenabmessungen sind auch die *Kernpunkte* (I. **108**) gegeben. Der Berechnung der Kernmomente steht dann nichts entgegen. In praktischen Fällen sollen aber, bei gegebener Lage des Bogenscheitels und der Stützweite, meist die Querschnittsabmessungen erst durch Rechnung festgestellt werden. Dazu benutzt man dann am besten die Schwerpunkts-Momente M_m. In solchen Fällen ist auch in der Regel der Querschnitt nach der Y-Achse symmetrisch. Dann gilt die Gleichung

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M_m}{W},$$

worin (nach I. **104** c, **106**) das *Widerstandsmoment* W durch

$$W = F \cdot k$$

ausgedrückt werden kann. Das gibt

$$\sigma = \frac{1}{F}\left(P + \frac{M_m}{k}\right)$$

und eine der beiden Kernweiten

$$k = \frac{M_m}{\sigma F - P},$$

oder auch

$$W = \frac{M_m + Pk}{\sigma}. \tag{69}$$

Für k ist in besondern Fällen vorerst ein Annäherungswert einzuführen. Vgl. das Beispiel unter **42**.

Sobald dann mit Hilfe von Einflußflächen (wie dies für den Dreigelenkbogen weiterhin gezeigt wird) die *gefährlichsten Querschnitte* ausfindig gemacht worden sind, kann man unter Annahme einer *zulässigen Spannung* σ (I. **7**, **12**) die Werte von W und k vorläufig berechnen. Dabei kann P genau genug aus der Gl. (66) (unter **36**, c) ermittelt werden. In manchen Fällen dürfen diese Annäherungswerte sogar endgültig beibehalten werden.

§ 7. Der Dreigelenkbogen.

38. Die günstigste Gestalt der Bogenachse. Bei gegebener Größe und Verteilung der Lasten, und gegebener Lage der drei Gelenke, bezeichnet man diejenige Bogenachse als die günstigste, für welche in jedem Querschnittspunkte sich die möglichst kleinsten Spannungen ergeben. Es fragt sich, wie diese Bogenachse gefunden wird. Im Hinblick

auf die im I. Bande über *Mittelkraftlinien* enthaltenen Darlegungen (I. **58** u. **59**) ist leicht einzusehen

1) wie diejenige Bogenachse die günstigste ist, die mit der Mittelkraftlinie zusammenfällt und

2) daß ein Zusammenfallen beider Linien nur bei ständiger, nicht aber bei veränderlicher Belastung möglich ist. Es empfiehlt sich deshalb, die folgenden Betrachtungen zunächst für ständige und veränderliche Lasten zu trennen.

a. Für ständige Lasten. Um bei gegebener Lage der Gelenke die günstigste Bogenachse zu finden, zeichnet man *mit der Bogenkraft H als Polweite* zwischen den Lastrichtungen eine Seillinie. Diese muß als Mittelkraftlinie durch die drei Gelenke verlaufen (I. **59**). Konnte dabei Größe und Verteilung der Lasten anfangs nicht genau genug geschätzt werden, so ist für die gefundene Mittelkraftlinie nochmals die Bogenkraft zu berechnen und mit Hilfe des danach berichtigten Kraftecks eine neue Mittelkraftlinie zu zeichnen. Dies Verfahren ist zu wiederholen, bis der dem vorliegenden Falle entsprechende Genauigkeitsgrad erreicht ist.

Läßt man derart die Mittelkraftlinie mit der Bogenachse zusammenfallen, so erfährt kein Bogenquerschnitt ein Moment, weil die Mittelkraft R aller äußern Kräfte des betrachteten Bogenteiles in der Bogenachse, d. h. im Schwerpunkte der Querschnittsfläche F, angreift. Zerlegt man R in die Längskraft P und die Bogenquerkraft Q, so erleidet jeder Querschnittspunkt eine Druckspannung

$$\sigma = \frac{P}{F}.$$

Das ist die kleinste zu erreichende Spannung. Denn sobald Bogenachse und Mittelkraftlinie nicht mehr im Schwerpunkte zusammenfallen, gibt es im betrachteten Querschnitte außer der Achsenkraft auch noch ein Schwerpunkts-Moment und beide zusammen erzeugen in einer der beiden Randfasern immer eine *größere* als obige Druckspannung σ.

b. Für veränderliche Lasten. Man denke sich zwei Mittelkraftlinien, die eine für *Voll*belastung (aus Verkehr und Eigengewicht) und die andere für Eigengewicht. Dann wird die erstere mit einer größeren Bogenkraft zu zeichnen sein, als die letztere, weil der Schwerpunkt der größeren Belastung näher nach dem Scheitelgelenk hin rückt, als derjenige der kleineren. Das ist beispielsweise für einen symmetrischen *Steinbogen* in Fig. 136 geschehen. Die Mittelkraftlinie für die Volllast ist mit I und diejenige für Eigengewicht mit II bezeichnet. Die Pole der zugehörigen Kraftecke sind O_{I} und O_{II} (Fig. 137). Beide Linien

wurden nur zur Hälfte dargestellt: I im linken, II im rechten Bogenteile. Um nun zu erklären, wie falsch es wäre, eine der beiden Mittelkraftlinien (I oder II) als Bogenachse zu wählen, ist in der Fig. 136 noch eine dritte Mittelkraftlinie (III) gezeichnet, und zwar für eine *einseitige*, über die linke Bogenhälfte reichende gleichmäßig verteilte Verkehrslast $q\frac{l}{2}$, wobei die *Belastungshöhe* q (I. **65**) dem Gewichte des Steines

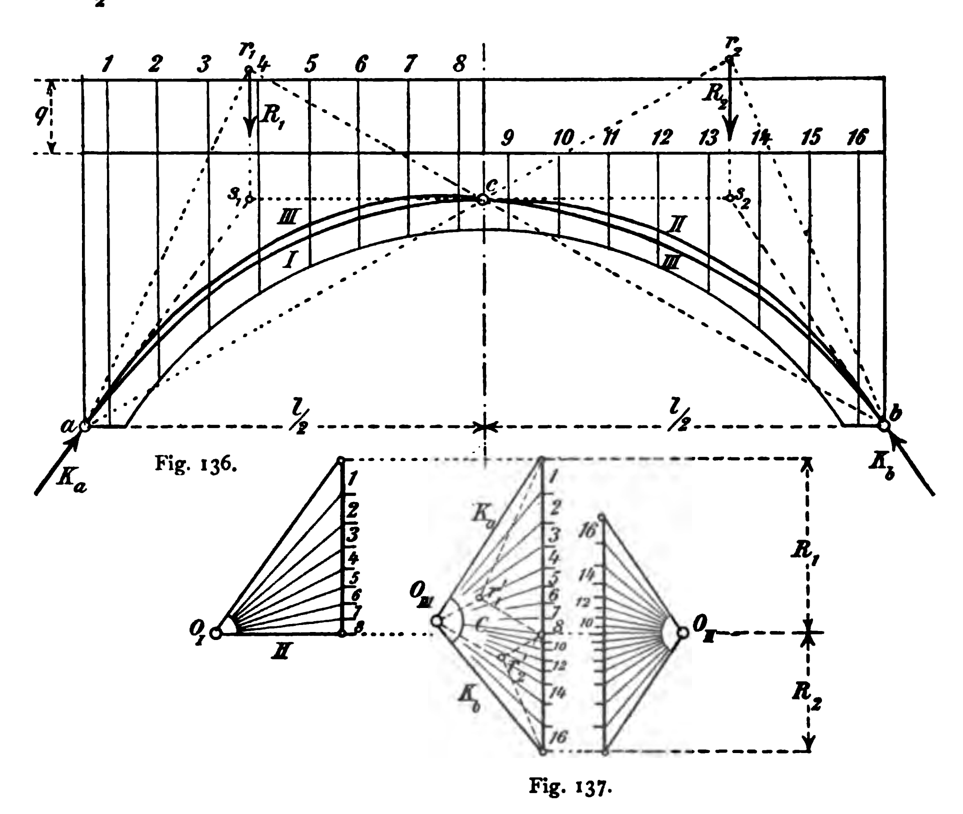


Fig. 136.

Fig. 137.

entsprechend, in *Stein*höhe ausgedrückt worden ist. Aus dem zugehörigen Kraftecke (mit dem Pole O_{III}) ersieht man, wie die Mittelkraftlinie III das Scheitelgelenk *c unter einer gegen die Wagerechte geneigten Richtung* trifft. Infolgedessen fällt sie im linken Bogenteile *ober*halb und im rechten Bogenteile *unter*halb von I und II. Das ist in der Fig. 138 im verzerrten Maßstabe nochmals auffälliger als es in Fig. 136—137 möglich war, dargestellt. Wollte man nun I zur Bogenachse machen, so paßte das für die rechte Bogenhälfte ganz gut, denn

dort liegen I und III dicht beisammen, d. h. *die Momente werden dort kleiner*, als wenn II Bogenachse wäre. Auf der linken Bogenseite läge aber I als Bogenachse viel ungünstiger als II. Und so ergibt sich denn, daß sowohl I als auch II als Bogenachse wohl für *eine* der beiden Bogenhälften, keine der beiden Linien aber (wie es doch durchaus sein muß) für beide Bogenhälften gleich gut passen kann.

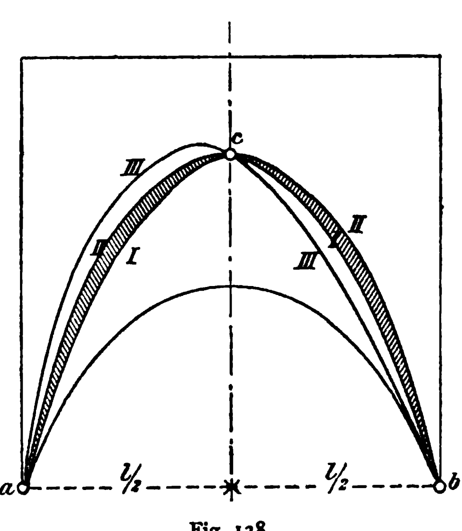


Fig. 138.

Die günstigste Bogenachse für veränderliche Lasten liegt nach obigem in der Mitte zwischen I *und* II, *d. h. sie müßte mit einer für eine mittlere Vollbelastung*

$$G + \frac{q}{2} l$$

gezeichneten Mittelkraftlinie zusammenfallen, wenn G das Eigengewicht des Bogenträgers bedeutet. Wählt man eine solche Mittelkraftlinie als Bogenachse, so werden die unter der *einseitigen* Verkehrslast entstehenden verschiedenen Lagen der Mittelkraftlinie III in allen Querschnitten so wenig wie möglich von der Bogenachse abweichen. Es wird dann nur noch zu untersuchen sein

1) welche der unendlich vielen möglichen Lagen der Linie III die *gefährlichste* ist, d. h. welche der Linien den überhaupt größten Druck oder Zug im Bogen verursacht und

2) wo der Querschnitt liegt, in welchem die überhaupt größten Grenzwerte erreicht werden.

Die beispielsweise für die Darstellung der Linie III benutzte einseitige Vollbelastung der einen Bogenhälfte ist in obigem Sinne *nicht die gefährlichste*, obwohl sie in praktischen Fällen zuweilen als solche angesehen wird. Diese halbseitige Vollbelastung hat nur die Eigenschaft, daß im Scheitelgelenk die Abweichung ihrer Richtung von der Wagerechten die größtmögliche wird, was leicht einzusehen ist, wenn man sich für verschiedene einseitige Volllaststrecken das Krafteck O_{III} der Fig. 137 gezeichnet denkt. Ist z. B. die veränderliche Laststrecke kürzer als $\frac{l}{2}$, so schiebt sich die Mittelkraft R_1 (Fig. 136) um so mehr nach

links, je kürzer die Strecke ist, und desto steiler gerät die zugehörige Kämpferkraft, während auf der rechten Bogenseite R_2 in Größe und Lage ungeändert bleibt. Der Pol O_{III} des Kraftecks (Fig. 137) sinkt also mit abnehmender Länge der Laststrecke auf dem Strahle $O_{III}r'_2$, der zur Richtungslinie br_1 parallel ist, und damit nähert sich *die Richtung der Scheitelkraft C* der Wagerechten. Sobald die veränderliche Laststrecke über den Scheitel c fortschreitet, ändern sich R_1 und die zugehörige Kämpferkraft nicht mehr; der Pol O_{III} bewegt sich daher mit dem Vorschreiten der Strecke auf der Parallelen zur Richtungslinie ar_2, d. i. auf dem Strahle $O_{III}r'_1$ der Fig. 137, nach abwärts. Damit ist nachgewiesen, daß die Richtung der Scheitelkraft C von der Wagerechten am meisten abweicht, wenn der Bogenträger über die halbe Stützweite durch die Verkehrslast q voll belastet ist.

Die vorhin aufgeworfenen Fragen nach der Lage der gefährlichsten Mittelkraftlinie III und des gefährlichsten Querschnittes werden, unter Verwendung von Einflußflächen, (**41**) beantwortet werden. Dabei wird auch nachgewiesen, *daß bei günstigster Führung der Bogenachse in jedem Querschnitte die positiven und negativen Grenzwerte des Schwerpunktmomentes gleich groß werden.*

39. Festlegen der Bogenachse durch Rechnung und Zeichnung.

a. Unterschiede bei Bogenträgern aus Eisen und Stein. Eisen ist auf Zug und Druck ziemlich gleich widerstandsfähig, während Steine, namentlich auch Beton, wie das im I. Bande ausführlich erläutert worden ist (I. § 18), nur eine sehr kleine Zugfestigkeit besitzen. Bei eisernen Bogenträgern braucht man daher nicht immer notwendig auf die Erzielung der günstigsten Bogenachse bedacht zu sein; es können unter Umständen, namentlich aus Schönheitsrücksichten, auch andere Bogenformen gewählt werden. Selbst wenn im Eisenbogen die Mittelkraftlinie in einzelnen Bogenschnitten stark *außerhalb des Kernes* fiele, so lägen dagegen Sicherheitsbedenken nicht vor, es könnte dadurch vergleichsweise nur das Gewicht der Konstruktion unnötig vergrößert werden.

Wesentlich anders liegt die Sache bei Steinbauten. Viele Konstrukteure sehen dabei, um Rissebildungen zu vermeiden, die Zugzone als nicht wirksam an und ziehen bei der Festsetzung der Gewölbestärken allein den elastischen Widerstand der Druckzone in Rechnung (I. **123** u. **128**, c). In solchen und auch andern Fällen von einiger Bedeutung wäre es ein Fehler, die Bogenachse mit einer geeigneten Mittelkraftlinie nicht zusammenfallen zu lassen. Vielmehr sollte man die günstigste Bogenform

recht scharf festzulegen suchen, um in Erwartung möglicher Zufälle bei der Bauausführung und im Betriebe des Bogens immer noch eine ausreichende Sicherheit gegen ein Hinaustreten der Mittelkraftlinie über die Kernlinien zu behalten.

In einigen Fällen[1] hat man auch eine Mittelkraftlinie als Bogenachse gewählt, die mit der *allein aus dem Eigengewicht* herrührenden Bogenkraft gezeichnet ist. Dies Verfahren erscheint wenig nachahmungswert, es sei denn, daß der betreffende Bogen nicht wesentlich mehr zu tragen hat als sein Eigengewicht. Denn es sind dabei, wie unter **38** ausführlich dargelegt wurde, weder die kleinstmöglichen Randspannungen im Gewölbe, noch das Eintreten von max. $+M =$ max. $-M$ in jedem Querschnitte zu erreichen (**41**, b).

Oft begnügt man sich damit, der Bogenachse *Parabel*gestalt zu geben. Die Parabel ist bei angenommener Lage der drei Gelenke geometrisch bestimmt und gut zu gebrauchen, weil sie sich leicht und genau zeichnen und es sich mit ihrer Gleichung auch bequem rechnen läßt. Sie wird aber mit der wirklich günstigsten Mittelkraftlinie *niemals genau* zusammenfallen, weil eine *gleichmäßige Verteilung des Eigengewichtes über die Bogenweite* bei praktischen Bauten nicht erwartet werden kann. Wohl darf eine solche Verteilung bei vielen eisernen Bogenträgern als *genau genug* erfüllt vorausgesetzt werden, bei Steingewölben ihrer eigentümlichen Übermauerung wegen aber in der Regel nicht. Dazu kommt noch, daß *bei Steinbauten von einiger Bedeutung der Einfluß des Eigengewichtes* auf die innern Kräfte bei weitem denjenigen der Verkehrslasten oder Nutzlasten überwiegt. Bei Steingewölben ist es daher zu empfehlen, *eine parabelförmige Bogenachse nur als erste Annäherung* anzusehen, um mit ihrer Hilfe dann die günstigste Bogenform genauer festzulegen. Wie dies geschehen kann, soll an dem folgenden Beispiele dargelegt werden.

b. Zahlenbeispiel. Für eine ständige Vollbelastung eines symmetrischen Steingewölbes (Fig. 139—140) ist die günstigste Bogenachse zu zeichnen und danach sind die Gewölbestärken zu berechnen. Gegeben die drei Gelenkpunkte a, b, c; die *Stützweite* $2w = 24$m; die *Pfeilhöhe* $f = 6$ m; eine *Belastungshöhe* $h = 2{,}0$ m über dem Scheitelgelenk c.

1. Um zuerst die *innere* Bogenlinie des Gewölbes annähernd festzulegen, berechnen wir die Gewölbestärke im Scheitel unter der Annahme einer parabolischen Bogenachse. Die *über* der Achse liegende Gesamtlast

---

[1] *Beton & Eisen.* 1904. 1. Heft. Die Reichenbachbrücke in München. S. 13.

G einer Bogenhälfte beträgt, bei einem Steingewicht von 2 t/cbm, auf 1 m Tiefe des Gewölbes

$$G = 2\left(wh + \frac{1}{3} f w\right) = 2w\left(h + \frac{1}{3} f\right)$$

oder

$$G = 96 \text{ t.}$$

Das gibt *gleichmäßig verteilt* gedacht

$$g = \frac{96}{12} = 8 \text{ t/m.}$$

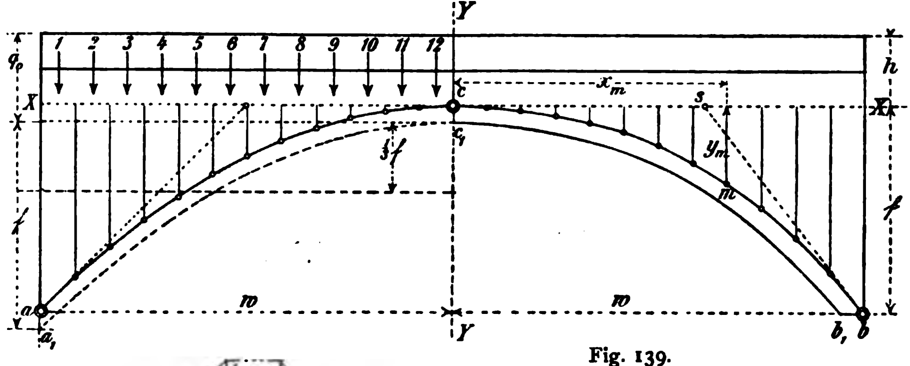


Fig. 139.

Fig. 140.

Danach erhält man unter Benutzung der Gl. (38) des I. Bandes (S. 156) für die Bogenkraft H:

$$H = \frac{g(2w)^2}{8f} = \frac{8 \cdot 24 \cdot 24}{8 \cdot 6},$$

d. i. $$H = 96 \text{ t.}$$

Nimmt man die zulässige reine Druckspannung des Steines zu 10 atm an, so gibt das für die Scheitelstärke d des Gewölbes

$$d \cdot 100 = \frac{H}{10} = \frac{96000 \text{ kg}}{10}$$

oder rund

$$d = 100 \text{ cm.}$$

Das gesuchte Maß cc_1 (Fig. 139) beträgt also 50 cm, so daß die ganze Belastungshöhe q_0 im Scheitel jetzt mit 2,5 m angeschrieben werden kann. Gleichmäßig verteilt, wobei als erste Annäherung die innere Bogenlinie a_1c_1 als Parabel angesehen werden darf, gibt das

$$q = 2\left(2{,}5 \cdot + \frac{1}{3} \cdot 6\right) = 9 \text{ t/m.}$$

Nach Gl. (37) (I. S. 155) gibt dies für ein durch den Scheitel gelegtes Achsenkreuz XY die Parabelgleichung

$$y = \frac{q x^2}{2H} \tag{70}$$

worin die Bogenkraft H aus

$$H = \frac{q(2w)^2}{8f}$$

zu berechnen ist. Das gibt

$$H = \frac{9 \cdot 24 \cdot 24}{8 \cdot 6} = 108 \text{ t}$$

und

$$y = \frac{1}{24} x^2. \tag{71}$$

2. Um jetzt die genauere Bogenachse zu finden, behalten wir die parabolische innere Wölblinie $a_1 c_1$ vorläufig bei und suchen die *ungleichmäßige Verteilung* der Last einer Bogenhälfte durch eine Formel auszudrücken.

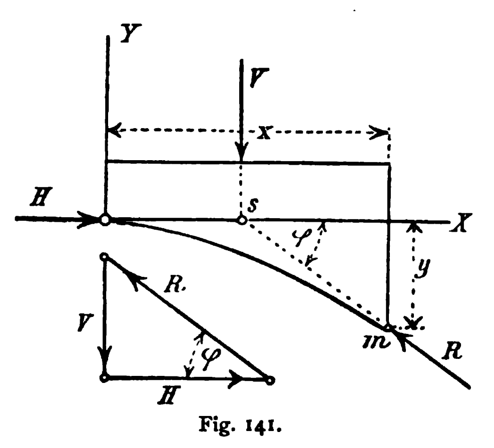


Fig. 141.

Nach den Darlegungen über die Gleichung einer Seillinie (I. 65) und mit Bezug auf die Fig. 141 ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{V}{H},$$

worin V und H die Seitenkräfte einer die Bogenachse im Punkte m der Koordinaten x, y berührende Mittelkraft R vorstellen. V ist das Gesamtgewicht zwischen Scheitel und Bogenpunkt m, H die Bogenkraft. Daraus folgt

$$y = \frac{1}{H} \int_0^x V dx + C.$$

Die Unveränderliche C ist für $x = 0$, $y = 0$ auch gleich Null. Um integrieren zu können ist V als Funktion von x darzustellen,

$$V = \gamma \left(q_0 x + \frac{k x^2}{3} \cdot x \right),$$

worin später $\gamma = 2$ t/m und k (nach Gl. 71) gleich $\frac{1}{24}$ einzusetzen ist. Durch Integration erhält man

$$y = \frac{\gamma}{H}\left(\frac{q_0 x^2}{2} + \frac{k \cdot x^4}{12}\right), \tag{72}$$

für $x = w$ und $y = f$ folgt:

$$f = \frac{\gamma}{H}\left(\frac{q_0 w^2}{2} + \frac{k \cdot w^4}{12}\right)$$

oder

$$H = \frac{\gamma}{f}\left(\frac{q_0 w^2}{2} + \frac{k \cdot w^4}{12}\right). \tag{73}$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte erhält man

$$H = \frac{2}{6}\left(\frac{2{,}5 \cdot 12 \cdot 12}{2} + \frac{144 \cdot 144}{24 \cdot 12}\right)$$

oder

$$H = 84 \text{ t}.$$

Die zuerst für eine Parabellinie berechnete Bogenkraft von 108 t *hat sich jetzt bei genauerer Rechnung für eine günstigere Bogenachse auf* 84 t *verringert.*

Ferner folgt die Gleichung der gesuchten günstigen Bogenachse mit

$$y = \frac{2}{84}\left(\frac{2{,}5 \cdot x^2}{2} + \frac{x^4}{24 \cdot 12}\right)$$

oder

$$y = \frac{1}{84}\left(2{,}5\, x^2 + \frac{x^4}{144}\right). \tag{74}$$

3. In der folgenden Tabelle sind die Ordinaten der Parabel und der gefundenen günstigeren Bogenachse — nach den Gl. (71 u. 74) berechnet — einander gegenüber gestellt.

Tabelle III. Ordinaten der Bogenachsen.

$x =$	Parabel	Verbesserte Bogenachse	$x =$	Parabel	Verbesserte Bogenachse
0	0	0	7,0	2,0417	1,6564
1,0	0,0417	0,0298	8,0	2,6667	2,2434
2,0	0,1667	0,1204	9,0	3,3750	2,9531
3,0	0,3750	0,2746	10,0	4,1667	3,8029
4,0	0,6667	0,4973	11,0	5,0417	4,8116
5,0	1,0417	0,7957	12,0	6,0000	6,0000
6,0	1,5000	1,1786			

Daraus ersieht man, wie die Unterschiede im Verlaufe der beiden verglichenen Linien nicht unerheblich sind. Außerdem fiel die Bogenkraft der genaueren Bogenachse um 16 t kleiner aus, als für die Parabel.

Will man, was in einigen Fällen zu empfehlen sein wird, die Bogenachse in ihrer Lage der günstigsten Mittelkraft noch näher bringen, so geschieht das am bequemsten graphisch, wie folgt. Man zeichne mit der Bogenkraft H (im vorliegenden Beispiele mit 84 t) und mit den aus der genau festgelegten innern Wölblinie $c_1 b_1$ (Fig. 139) berechneten Gewichten ein neues Krafteck und dazu eine neue Mittelkraftlinie. Diese wird mehr oder weniger von der bis dahin erhaltenen Bogenachse abweichen. Man halbiere die Abweichungen, zeichne durch die Halbierungspunkte eine neue Bogenachse, passe dieser die innere Wölblinie an, bestimme die neue Bogenkraft und setze das beschriebene Verfahren fort, bis Krafteck und Seillinie mit der Bogenachse genau genug zusammenfallen. Aus praktischen Gründen ersetzt man die so gefundene Bogenlinie dann durch einen passenden *Korbbogen*.

In Fällen, wo die obige Gleichung (74) noch keine ausreichend genauen Ordinaten geben sollte, kann auch eine *kubische Parabel* oder eine Parabel noch höherer Ordnung gute Dienste leisten. Es ist aber immerhin zu bedenken, daß die in den Kraftecken aufgenommenen *Gewichts*strecken in keinem praktischen Falle mit den in der Konstruktion tatsächlich verwendeten Gewichten genau übereinstimmen können. Deshalb ist eine übergroße Peinlichkeit beim Aufsuchen der günstigsten Bogenachse nicht wohl angebracht, vielmehr als Zeitverschwendung anzusehen.

Das an obigem Beispiele beschriebene Verfahren ändert sich grundsatzmäßig nicht, wenn *veränderliche Lasten* vorliegen. Auch für *gelenklose* Tonnengewölbe ist es mit Vorteil zu gebrauchen, wenn man dabei die Bogen*mittel* im Scheitel und an den Kämpfern als Gelenkpunkte ansieht. Darüber ist § 8 zu vergleichen.

40. Einflußlinien. Wenn die Bogengestalt festliegt, bestimmt man die Grenzwerte der äußern und innern Kräfte am einfachsten mit Hilfe von Einflußlinien. Solche sind für die äußern Kräfte — Kämpferlinienkraft, Bogenkraft und Kämpferkraft — unter **27** bereits gegeben. Bleiben nur noch *Moment* und *Bogenquerkraft* (**36**, b), mit deren Hilfe die Spannungen berechnet werden. Die *Randspannungen* folgen unmittelbar aus den Einflußflächen der *Kern*momente (**37**).

a. Momente und Randspannungen. In der Fig. 142—143 ist für die Kernpunkte o und u des Querschnittes tt je eine Einflußfläche des Momentes (bei *unmittelbarer* Lastübertragung) gezeichnet. Die Art der Darstellung stimmt mit dem für gegliederte Dreigelenkträger (unter **27**) gegebenen Verfahren völlig überein. Danach steht für einen lotrechten Schnitt in der Entfernung x vom Kämpfer a die Einflußfläche des

Momentes fest, sobald die Lastscheide gefunden ist. Die dazu notwendigen Linien sind in Fig. 142—143 durch *rote* Farbe ausgezeichnet.

Das Kernmoment (und damit auch die zugehörige Randspannung)

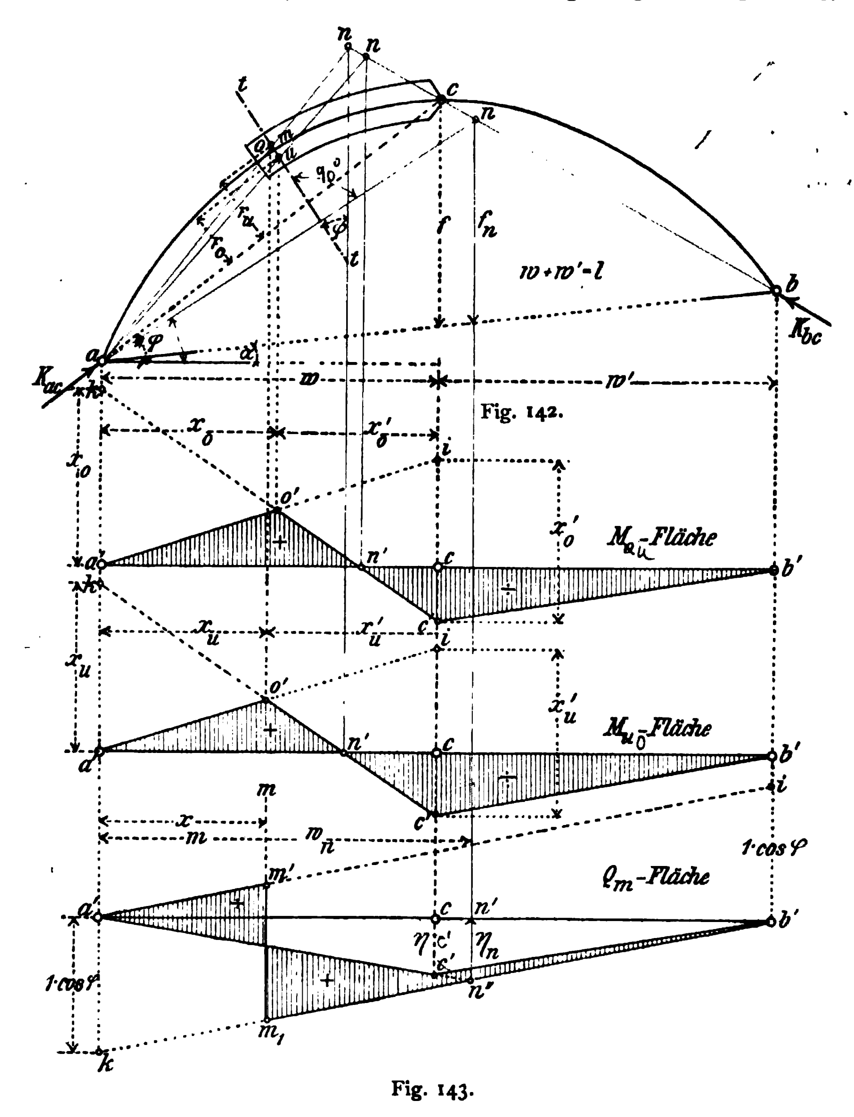


Fig. 142.

Fig. 143.

des betreffenden Querschnittes wird Null, sobald die wandernde Einzellast eine Kämpferkraft hervorruft, deren Richtung durch den zugehörigen Kernpunkt verläuft. Die Einzellast liegt dabei stets auf demjenigen

Bogenschenkel, der den betrachteten Querschnitt enthält und deshalb fällt die gegenüberliegende Kämpferkraft (K_{bc}) in die Richtungslinie bc. Durch den Schnittpunkt n der beiden Kämpferkraft-Richtungen führt die Lastscheide.

Um die Gestalt der Einflußfläche vollends festzulegen, braucht jetzt auf der Stützenlotrechten in a nur noch die Strecke x aufgetragen zu werden (**5**, c). Ihr Endpunkt k, mit dem Lastscheidepunkt n' verbunden und bis zur Scheitelgelenk-Lotrechten verlängert, gibt die Eckpunkte (o' und c' der Fig. 143) der M_o- und der M_u-Fläche. Bei der Verlängerung der Geraden $a'o'$ wird auf der Scheitelgelenk-Lotrechten die Strecke $x' = c'i$ abgeschnitten. Die rechnerische Bestimmung der Einflußzahlen für die beiden Eckpunkte, sowie auch der Lage des Lastpunktes n' vergl. weiterhin.

Wollte man die für M_o und M_u gezeichneten Flächen zur Berechnung der Grenzwerte der Randspannungen σ_o und σ_u benutzen, so müßte man wegen

$$\sigma = \frac{1}{F \cdot k}\,(M_k)$$

noch den Multiplikator $\mathfrak{m} = \frac{1}{Fk}$ hinzufügen, wofür bei lotrechter Belastung und symmetrischem Querschnitte auch

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{W}$$

gesetzt werden kann (I. **112**, S. 359).

Die Ordinate cc' der Einflußflächen ist graphisch unmittelbar aus dem Kernmoment der Kämpferkraft K_{ac} nachzuprüfen. Denn es ist (mit Bezug auf die Fig. 143)

$$M_o = K_{ac} \cdot r_o$$

$$M_u = K_{ac} \cdot r_u,$$

wobei K_{ac} für $P = 1$ im Lastpunkte c zu bestimmen ist.

b. Bogenquerkräfte.

1. Für den unter dem Winkel φ gegen die Lotrechte geneigten Querschnitt und für *unmittelbare* Lastübertragung ist unten in Fig. 143 eine Q_m-Fläche gezeichnet. m ist der Achsenpunkt des Schnittes. Als Grundlage der Darstellung diente die Gl. für Q_k (S. 167):

$$Q_m = Q_{am}\cos\varphi - H\left(\frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha}\right).$$

Die Winkelwerte der Fig. 143 sind folgende:

$$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}662\,; \quad \operatorname{tg}\alpha = 0{,}111.$$

Daraus berechnet sich:

$$\varphi = 33^{0}\,30'; \quad \alpha = 6^{0}\,20';$$

$$\cos\varphi = 0{,}834\,; \quad \sin\varphi = 0{,}552\,; \quad \cos\alpha = 0{,}994\,; \quad \sin(\varphi - \alpha) = 0{,}456.$$

Das gibt:

$$Q_m = 0{,}834\,Q_{am} - 0{,}459\,H.$$

Die Ordinaten der Einflußlinie der *Balken*querkraft (**34**, b) sind danach mit $\cos\varphi = 0{,}834$ multipliziert und die Ordinate des Einflusses der Bogenkraft H_c ist für die Lage von $P = 1$ in c berechnet worden. Das gab

$$\overline{cc'} = 0{,}459\,H_c.$$

Weil in Fig. 142

$$w = w' = 9 \text{ m}$$

$$f = 6 \text{ m},$$

so folgte

$$H_c = \frac{M_{ac}}{f} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 9}{6} = \frac{3}{4}\text{ t}$$

und

$$\overline{cc'} = 0{,}459 \cdot 0{,}75 = 0{,}344 \text{ t}.$$

2. Eine *Nachprüfung* der Richtigkeit der Darstellung wurde auf folgende Weise bewirkt: Als ob eine Lastscheide, die in Wirklichkeit nicht vorhanden ist, gefunden werden sollte, wurde zuerst diejenige Richtung der Kämpferkraft in a gesucht, für welche $Q_m =$ Null wird. Das ist die in *roter* Farbe angegebene Linie an, die *parallel* läuft zu einer im Achsenpunkte m des betrachteten Querschnittes tt gelegten Berührungsgeraden. Denn wenn die Richtung der Mittelkraft aller auf den linken Bogenteil am wirkenden äußern Kräfte mit dieser Tangente zusammenfällt oder ihr parallel läuft, dann steht die Mittelkraft senkrecht zum Querschnitte, hat also keine *in* die Querschnittsfläche fallende Seitenkraft mehr. Wenn nun auch die Lotrechte nn'' diesmal *keine Lastscheide* ist, so muß sie doch durch den Schnittpunkt n'' der Geraden $a'c'$ und $b'k$ verlaufen, kann also dazu dienen, die richtige Lage dieses Punktes nachzuprüfen.

Der Beweis dafür, daß der im Schnitte der beiden Kämpferkräfte K_{an} und K_{bc} liegende Punkt n lotrecht über den Punkt n' fallen muß, folgt aus dem Vergleiche der Ordinate $cc' = \eta$ mit der Ordinate $n'n'' = \eta_n$ (Fig. 143). Es läßt sich nämlich nachweisen, daß die Ordinate η_n ebenso

groß ist, wie die für eine in der nn' liegende Einzellast $P = 1$ berechnete Bogenkraft H_n, wenn n dabei als Scheitelgelenk betrachtet wird, in welchem die Richtungslinien an und bn münden, was zulässig, weil die Lage des Gelenkes auf die Größe der *Balken*querkraft Q_{am} ohne Einfluß ist.

Es wurde gemacht (mit Bezug auf die Fig. 143)

$$\frac{\eta_n}{\eta} = \frac{w_n}{w}.$$

Die entsprechenden Bogenkräfte berechnen sich mit

$$H_n = \frac{A_n w_n}{f_n}$$

und

$$H_c = \frac{A_c w}{f}.$$

Ihr Verhältnis gibt

$$\frac{H_n}{H_c} = \frac{A_n w_n \cdot f}{A_c w \cdot f_n}.$$

Es ist aber

$$\frac{A_n}{A_c} = \frac{1 \cdot (l - w_n)}{1 \cdot (l - w)} = \frac{f_n}{f}.$$

Das gibt

$$\frac{H_n}{H_c} = \frac{w_n}{w},$$

womit bewiesen ist, daß

$$\frac{H_n}{H_c} = \frac{\eta_n}{\eta}$$

oder daß n' lotrecht über n'' fallen muß.

Hätte man mit Hilfe des Punktes n den Punkt n' zuerst festgelegt, so wäre damit die vorherige Berechnung von η_c umgangen worden.

3. In der Fig. 144 ist eine Einflußfläche für Q_m und für *mittelbare* Lastübertragung gezeichnet, um zu zeigen, wie die Darstellung vereinfacht werden kann, wenn man von vornherein die Lastscheide festlegt. Die Kämpferkraft K_{an} läuft parallel zur Tangente an die Bogenachse in m. Ihr Schnittpunkt n mit der Richtung von K_{bc} liegt also in der Lastscheide. Macht man jetzt noch die Strecken $a'k$ und $b'i$ gleich $+ 1 \cdot \cos\varphi$ und $- 1 \cdot \cos\varphi$, so ist damit der Gesamtumriß der gesuchten Einflußfläche gegeben: Man ziehe die kn' und verlängere sie bis zum Punkte c' der Scheitelgelenk-Lotrechten, dadurch erhält man die Ecken c' und f' desjenigen Teiles der Einflußfläche, in welchem der Einfluß der Bogenkraft und der Balkenstützenkraft A addiert

erscheinen. Die für die Balkenstützenkraft B gezeichnete Grenzlinie $a'i$ gibt die Ecke e'. Im Querträgerfelde ist die Einflußlinie $e'f'$ eine Gerade.

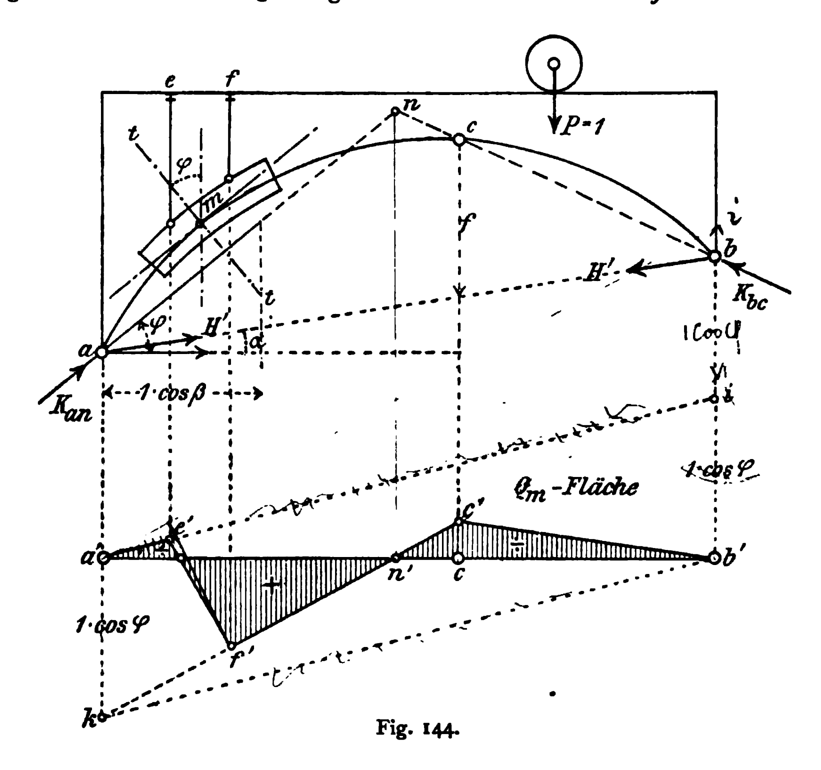


Fig. 144.

41. Die überhaupt gefährlichsten Querschnitte und Lastlagen.

a. Das gewöhnliche Ermittelungsverfahren.

Um die Grenzwerte der Randspannungen zu erhalten, zeichnet man für eine ausreichende große Zahl verschiedener Querschnitte die Einflußflächen der Kernmomente und daraus berechnet man die zugehörigen einzelnen Grenzwerte. Diese trägt man dann als Ordinaten einer Kurve auf. Das gibt zwei Linien, eine für die positiven und eine für die negativen Grenzwerte der Randspannungen. Deren Maxima bezeichnen die überhaupt größten Grenzwerte und zugleich die Lage des überhaupt gefährlichsten Querschnittes. Das ist ein etwas umständliches Verfahren, wenn es sich dabei nur darum handelt die größten Grenzwerte zu finden. Eine praktische Bedeutung ist ihm aber nicht abzusprechen, weil beim Entwurfe eines Vollwandbogens meistens nicht nur die Abmessungen des überhaupt gefährlichsten, sondern auch der übrigen Querschnitte berechnet werden.

Bei Steingewölben ist auch noch ein anderes Verfahren in Gebrauch, das schon einmal (**38**, b) erwähnt wurde[1]. Dabei gibt man zuerst der Bogenachse eine günstige Gestalt und zeichnet dann eine Mittelkraftlinie für eine bis zum Scheitelgelenk reichende einseitige gleichmäßige Vollbelastung. Die Linie läßt aber die Querschnitte, in denen die überhaupt größten Momente vorkommen, nicht erkennen, weil die bezeichnete gewählte Lastlage nicht die überhaupt gefährlichste ist. Das Verfahren ist aber einfach und für manche praktische Fälle — auch für kleinere Steingewölbe ohne Gelenk — als genau genug wohl zuzulassen.

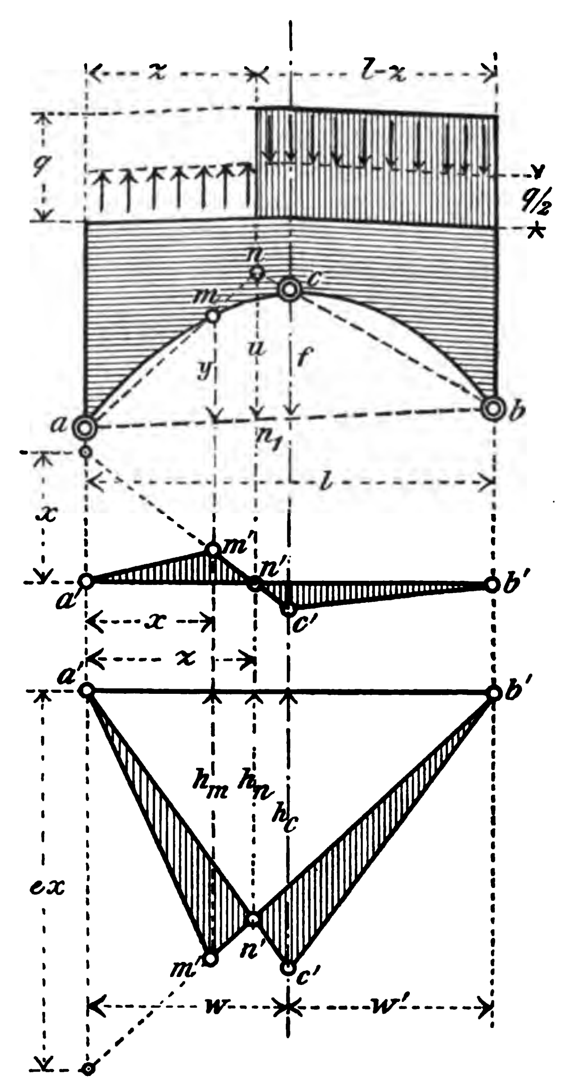


Fig. 145.

Nachstehend ist ein *neues Verfahren* beschrieben, mit dessen Hilfe die überhaupt gefährlichste Lastlage und der zugehörige Querschnitt *unmittelbar* aufzufinden sind.

b. Unmittelbare Bestimmung des gefährlichsten Querschnittes.

1. Es handelt sich hier um denjenigen

[1] Nach TOLKMITT, Leitfaden für das Entwerfen und die Berechnung gewölbter Brücken. 2. Aufl. 1902.

Querschnitt, in welchem das größte Moment vorkommt, wenn 1) bei der Berechnung eine gleichmäßig stetige Belastung zugrunde gelegt wird und wenn 2) die Mittellinie des Bogens eine Mittelkraftlinie darstellt, gezeichnet für das Eigengewicht und eine volle Verkehrslast $\frac{ql}{2}$ (**38**, b).

Aus der allgemeinen Gestalt der Einflußfläche des Schwerpunktmomentes M_x für einen Querschnitt in der Entfernung x vom linken Kämpfer a (Fig. 145) geht hervor, daß eine bis zur Lastscheide reichende Teilbelastung immer die gefährlichste ist. Denkt man sich die Einflußfläche mit dem Eigengewicht und der Verkehrslast $\frac{ql}{2}$ belastet, so ergibt sich daraus für keinen Bogenquerschnitt ein Moment. Denn es ist dann:

$$M_x = \frac{q}{2}\int_0^l F_e + \int_0^l g\eta\,dx = 0.$$

Darin ist F_e (algebraisch genommen) der Gesamtinhalt der Einflußfläche; g das veränderliche Eigengewicht für die Längeneinheit der Bogenweite l; η eine Ordinate der Einflußfläche.

Weiter denke man die Einflußfläche auf der Strecke z (von a' bis zur Lastscheide n') durch eine *negative* (nach oben gerichtete) Verkehrslast der Größe $-\frac{qz}{2}$ und die anstoßende Strecke $(l - z)$ durch eine *positive* Verkehrslast $+\frac{q(l-z)}{2}$ belastet, also durch eine Belastung, die *gleichwertig* ist einer solchen, bei welcher die Strecke z allein das Eigengewicht und die Strecke $(l - z)$ eine Volllast $q(l - z)$ + Eigengewicht zu tragen hat (Fig. 145).

Das Moment M_x für die bezeichnete einseitige Vollbelastung, die in der Fig. 145 durch Schraffierung hervorgehoben worden ist, ist danach mit

$$M_x = \left(-\frac{q}{2}\right)(+f_1) + \left(+\frac{q}{2}\right)(-f_2)$$

anzuschreiben, wenn f_1 und f_2 die Inhalte der links und rechts von der Lastscheide liegenden Teile der Einflußfläche bedeuten. Das ist

$$M_x = -\frac{q}{2}(f_1 + f_2) = -\frac{q}{2}\cdot F_e. \qquad (75)$$

Daraus folgt der Satz:

Derjenige Querschnitt ist der gefährlichste, für welchen der Inhalt der ganzen (positiv zu rechnenden) Einflußfläche des Momentes am größten wird.

Dieser Satz gilt allgemein auch für Einflußflächen, die *mehr als eine* Lastscheide haben, wie leicht einzusehen ist. An Stelle der einseitigen Belastung q tritt dann $\frac{q}{2}$, für positive und negative Teilflächen in verschiedenem Sinne wirkend.

Belastet man die Teilflächen f_1 und f_2 nicht wie oben, sondern *in umgekehrtem Sinne*, so erhält man für jeden Querschnitt

$$M_x = +\frac{q}{2}(f_1) + \left(-\frac{q}{2}\right)(-f_2)$$

oder

$$M_x = +\frac{q}{2}(f_1 + f_2) = +\frac{q}{2} \cdot F_e.$$

In Worten ausgedrückt:

In jedem Querschnitte ist das positive und negative Moment gleich groß.

Im gefährlichsten Querschnitte entstehen auch die größten *Kern*momente, also auch die größten Randspannungen.

Für den Sonderfall einer *Parabel*-Bogenlinie muß für jede gleichmäßig verteilte Volllast M_x = Null werden, d. h. es muß

$$+q(+f_1) + q(-f_2) = 0$$

werden, oder

$$f_1 = f_2. \tag{76}$$

Die Abszisse x, für welche F_e am größten wird, findet man am einfachsten auf zeichnerischem Wege. Wie das geschehen kann, soll zuerst gezeigt werden.

2. Der Inhalt F_e der Einflußfläche des Momentes ist durch die drei Ordinaten h_m, h_n und h_c (Fig. 146 unten) bestimmt. Es ist

$$F_e = (h_m + h_c - 2h_n)\frac{l}{2}$$

oder

$$F_e = \left(\frac{h_m + h_c}{2} - h_n\right) l. \tag{77}$$

Der Summand

$$\tfrac{1}{2}(h_m + h_c) - h_n$$

ist für beliebige Abszissen x leicht graphisch darzustellen.

Das ist in der Fig. 146 für einen Bogenträger von 24 m Weite und 6 m Pfeil beispielsweise durchgeführt. Die Mittellinie des Bogens ist (nach der früheren Tabelle III des Zahlenbeispiels **39**, b) aus der Gleichung (74) mit

$$y = 6{,}0 - \frac{1}{84}\left[2{,}5\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 + \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^4}{144}\right]$$

berechnet und gezeichnet. Die Belastungshöhen sind in der Fig. 146 eingeschrieben.

In der linken Hälfte der Figur sind für die 11 Querschnitte 1 bis 11 alle Ordinaten h_m und in der rechten Hälfte die Ordinaten h_n der Lastscheiden dargestellt. Dadurch fanden sich die Ordinaten h_c der verschiedenen Bogenkraftflächen. Die halbe Summe von $h_m + h_c$ ergab

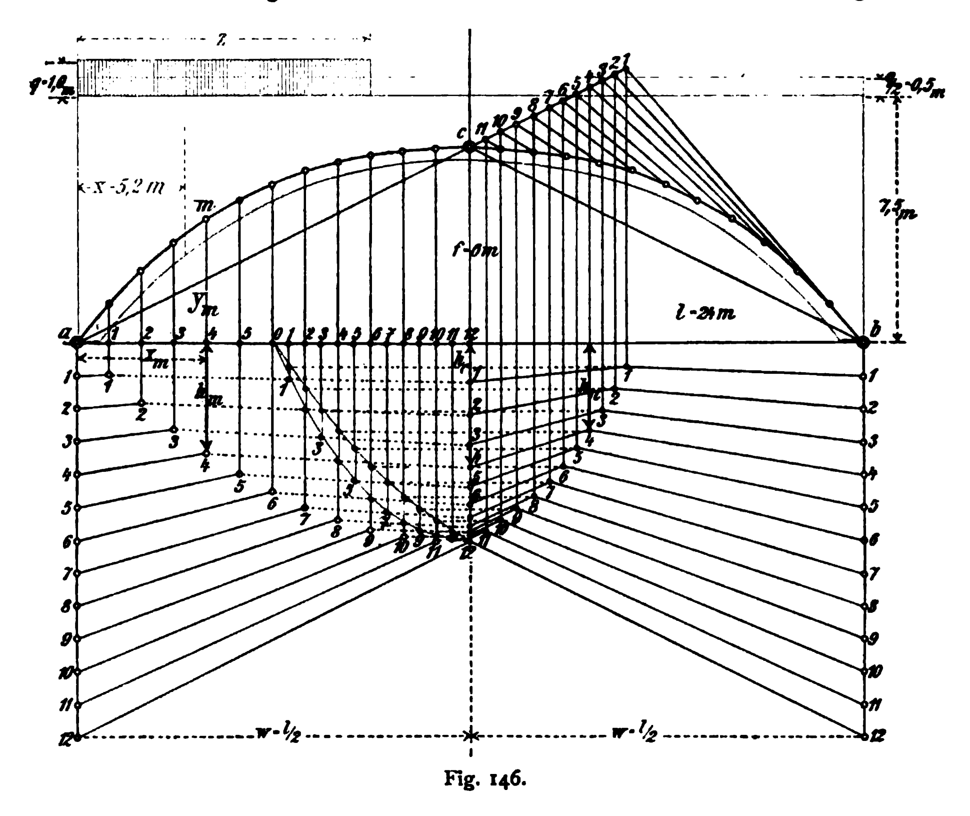


Fig. 146.

sich für jeden Querschnitt aus der Teilung der Verbindungslinie zwischen den betreffenden Endpunkten 1 bis 11, wie dies aus der Fig. 146 zu ersehen ist. Auch die Differenzen

$$\tfrac{1}{2}(h_m + h_c) - h_n$$

konnten rein graphisch dargestellt werden. Dadurch entstanden die beiden *rot* gezeichneten krummen Linien 0—12, deren lotrechte Abstände voneinander ein Maß für die Größe von F_e abgeben. F_e zeigte sich am größten für eine Abszisse $x = 5{,}3$ m. *Damit war die überhaupt gefährlichste Lastlage gefunden.*

Eine *rechnerische Nachprüfung*, die weiterhin (unter 3) gegeben wird, ergab $x = 5{,}20$ m.

Für eine *Parabel*-Bogenlinie ist das beschriebene Verfahren noch einfacher, weil es (nach Gl. 76) genügt, an Stelle von F_e die Teilfläche f_1 zu setzen, wobei

$$f_1 = \tfrac{1}{2}(h_m - h_n)\, l \tag{78}$$

anzuschreiben wäre.

3. *Rechnerisch* wäre der überhaupt gefährlichste Querschnitt nach der Theorie der Maxima und Minima zu finden. Dazu wären h_m, h_n und h_c analytisch darzustellen. Aus der Fig. 145 ist, unter Benutzung der Gleichung (78) zu entnehmen:

$$h_m = \frac{x(l-x)}{l} \tag{79}$$

und

$$h_n = \frac{x(l-z)}{l}. \tag{80}$$

Es ist aber auch

$$h_n = \frac{h_c \cdot z}{w},$$

woraus

$$h_c = \frac{x(l-z)\,w}{lz} \tag{81}$$

folgt. Es fehlen noch die Beziehungen zwischen x, y und z. Wird die Lotrechte $nn_1 = u$ gesetzt, so ist einerseits

$$u = \frac{f(l-z)}{w'}$$

und anderseits

$$u = \frac{yz}{x}.$$

Daraus folgt

$$\frac{yz}{x} = \frac{f(l-z)}{w'}. \tag{82}$$

Aus obigen Werten für h_m, h_n und h_c erhält man nach Gl. (77)

$$F_e = x\left[z - \left(\frac{l+x}{2}\right) + \left(\frac{l-z}{2z}\right)w\right]. \tag{83}$$

Für eine gegebene Mittellinie $y = f(x)$ des Bogens ist danach für jedes x die Lage der Lastscheide zu berechnen. Dadurch sind auch die Ordinaten h_m, h_n und h_c gegeben. Es stände also nichts im Wege, durch Nullsetzen der nach x genommenen Abgeleiteten von F_e den

gefährlichsten Querschnitt unmittelbar aufzusuchen. Praktisch dürfte aber das beschriebene zeichnerische Verfahren vorzuziehen sein. Schon wenn die Bogenachse eine gewöhnliche *Parabel* der Gleichung

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x) \tag{84}$$

ist (I. **65**, b) wird die unmittelbare Ermittelung des gefährlichsten Querschnittes umständlich. Wir wollen aber die Berechnung für einen symmetrischen Parabelbogen durchführen, weil sie immerhin Interesse bietet.

Aus Gl. (82) folgt für $w = w' = \frac{l}{2}$:

$$z = \frac{2f(l - z)x}{ly}.$$

Durch Verbindung mit der Parabelgleichung erhält man

$$z = \frac{l^2}{3l - 2x}. \tag{85}$$

Aus den Gl. (78 u. 83) folgt weiter die Teilfläche

$$f_e = \frac{l}{2}\left(\frac{x(l-x)}{l} - \frac{x(l-z)}{l}\right)$$

oder

$$f_e = \frac{x}{2}(z - x). \tag{86}$$

Daraus z mit Hilfe der Gl. (85) entfernt, gibt

$$f_e = \frac{2x^3 - 3lx^2 + l^2 x}{3l - 2x}$$

und durch Division

$$f_e = -x^2 - \frac{l^2}{2} + \frac{3l^3}{2(3l - 2x)}. \tag{87}$$

Ferner aus

$$\frac{\partial f_e}{\partial x} = -2x + \frac{3l^3}{(3l - 2x)^2} = 0$$

$$x^3 - 3lx^2 + \frac{9}{4}l^2 x - \frac{3}{8}l^3 = 0.$$

Für x erhält man daraus die drei Wurzeln

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}234\, l \\ x_2 &= 0{,}826\, l \\ x_3 &= 1{,}94\, l. \end{aligned} \tag{88}$$

$\frac{\partial^2 f_e}{\partial x^2}$ ergibt sich *negativ* für $x_1 = 0{,}234\, l$. *x_1 ist danach die Abszisse des gefährlichsten Querschnittes.*

Im vorhin graphisch durchgeführten Beispiel der Fig. 146 wurde

$$x = 5{,}3 \text{ m} = \frac{5{,}3}{24} l = 0{,}221\, l$$

gefunden. Für *konstruktive Zwecke dürfte man danach wohl genau genug den gefährlichsten Querschnitt in der Mitte eines Bogenschenkels* annehmen.

Will man in gegebenen Fällen die Abszisse x schärfer angeben, so genügt es F_e für einige zwischen 0,2● l und 0,25 l liegende Querschnitte genauer darzustellen oder zu berechnen, um zu erkennen, wo das Maximum liegt. In solcher Weise ist die graphische Darstellung des Beispiels der Fig. 146 nachgeprüft worden. Das Nähere darüber ergibt die Tabelle IV, in welcher die erforderlichen Rechnungsergebnisse zusammengetragen sind.

Tabelle IV. Abszisse des gefährlichsten Querschnittes.

Abszisse x	Ordinate y	Abszisse der Lastscheide z	$-F_e$
5,00	4,343	8,768	23,455
5,10	4,396	8,811	23,480
5,18	4,437	8,847	23,486
5,20	4,447	8,855	23,488
5,22	4,457	8,865	23,483

Die Abszisse war danach genauer

$$x = 5{,}20 \text{ m}.$$

42. Beispiel der Berechnung eines eisernen Bogens. Zwei flußeiserne vollwandige Dreigelenkträger von 30 m Stützweite und 5 m Pfeil tragen eine 5 m breite Straße (Fig. 147). Die Trägerwand soll aus einem Stehbleche, Saumwinkeln und Gurtplatten gebildet werden (I. **113**, a. 3) und im gefährdetsten Querschnitte nicht höher als 60 cm werden. Die zulässige Spannung (I. **7**) des Flußeisens ist zu 900—1000 atm, das Eigengewicht der ganzen Konstruktion mit 1400 kg für 1 m Brückenlänge und die Verkehrslast mit 500 kg auf 1 qm Brückenbahn anzurechnen. Danach sind die Abmessungen der wichtigsten Querschnitte des Bogens festzusetzen.

a. Der Bogen wird in den betreffenden Querschnitten als gerader Stab angesehen.

1. Die Mittellinie des Bogens wird als eine *Parabel* angenommen.

Dann liegt der gefährlichste Querschnitt m (nach Gl. 88) in einer Entfernung

$$x_m = 0{,}234\, l = 7{,}02 \text{ m}$$

von einem Kämpferpunkte.

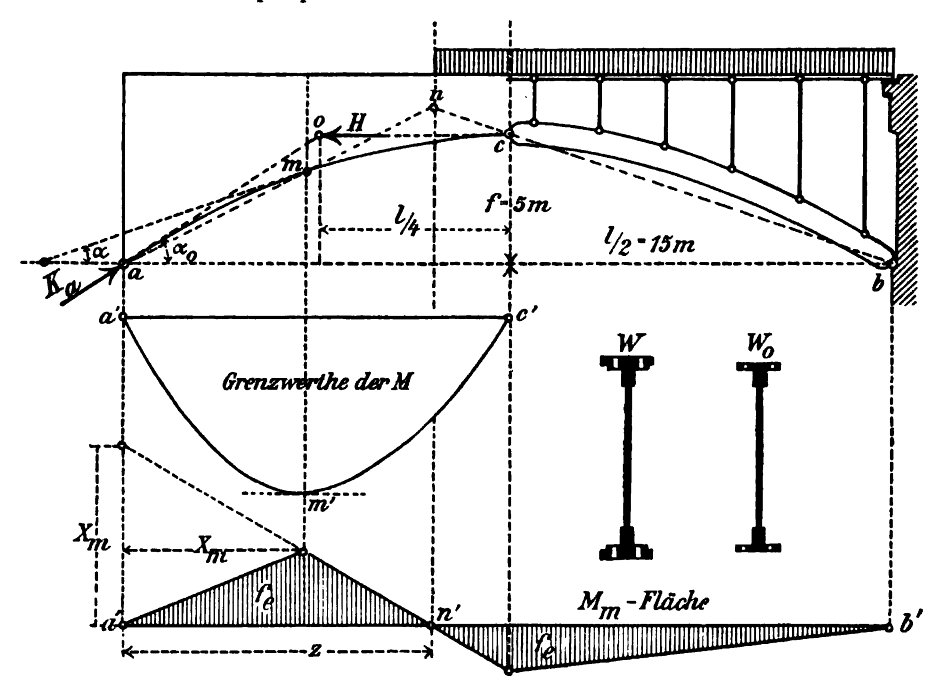


Fig. 147.

Die Lastscheide berechnet sich aus der Gl. (85) mit

$$z = \frac{l^2}{3l - 2x} = 11{,}85 \text{ m.}$$

Der Inhalt f_e einer *Hälfte* der Einflußfläche beträgt nach Gl. (86)

$$f_e = \frac{x(z - x)}{2} = \frac{33{,}91}{2} = 16{,}95 \text{ qm.}$$

Weil nun das Schwerpunkts-Moment aus jeder *gleichmäßigen* Volllast gleich Null wird, so ist nur die gefährlichste Lage der Verkehrslast zu berücksichtigen. Dafür erhält man

$$\text{max.} \pm M = f_e \cdot \frac{500 \cdot 5}{2} = 16{,}95 \cdot 1250 \frac{\text{m}^2\,\text{kg}}{\text{m}} = 21188 \text{ mkg,}$$

wobei die Verkehrslast für *einen* Träger und 5 m Straßenbreite gerechnet ist.

Aus der Gl. (69) erhält man einen ersten angenäherten Wert von W mit

$$W = \frac{M + P \cdot k}{\sigma}.$$

Die *Kernweite* k kann im vorliegenden Falle nach der Gl. (111) des I. Bandes (S. 344) annähernd bestimmt werden.

Die Gleichung lautet

$$y_n = \frac{r_x^2}{v},$$

worin $v = k$ und $F r_x^2 = J$ zu setzen ist. y_n ist der Abstand einer den Querschnitt berührenden Nulllinie. Setzt man annähernd

$$J = F(0{,}8\, y_n)^2 = 0{,}64\, y_n^2 F,$$

so gibt das

$$v = k = \frac{J}{F \cdot y_n} = 0{,}64\, y_n.$$

Soll die Querschnittshöhe h (wie vorgeschrieben) das Maß von 60 cm nicht überschreiten, so erhält man höchstens

$$k = 0{,}64 \cdot 30 = 19{,}2 \text{ cm}.$$

Die *Achsenkraft* P_m findet man (nach **36**, c) aus der Parabelgleichung (84)

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x).$$

Es ist (mit Bezug auf Fig. 147)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2}(l - 2x) = \frac{20}{900}(30 - 14{,}04) = 0{,}355.$$

Daraus folgt $\alpha = 19^0 35'$ und $\sin \alpha = 0{,}335$.

Ferner ist

$$P_m = \frac{Q_{am}}{\sin \alpha},$$

worin die Balkenquerkraft aus dem Eigengewicht + der Verkehrslast einzusetzen ist. Also (mit Bezug auf Fig. 147):

$$P_m = \frac{1}{\sin \alpha}\left[\frac{1400}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x_m\right) + \frac{500 \cdot 5}{2} - \frac{(l - z)^2}{2l}\right] = 37161 \text{ kg}. \quad (89)$$

Somit ist anzuschreiben:

$$W = \frac{100 \cdot 21188 + 37161 \cdot 19{,}2}{900} = 3147 \text{ cm}^3.$$

Wir wählen[1] einen Querschnitt, dessen Widerstandsmoment 3217 cm³ ist. Er zeigt zwei Gurtplatten, je 1,0 cm stark und 19 cm breit, ein 56 cm hohes 1 cm dickes Stehblech mit 4 Winkeln Nr. $7\frac{1}{2}$ von je 1,0 cm Stärke gesäumt, und mit 2,0 cm starken Nietlöchern. Die volle Querschnittsfläche F beträgt danach

$$F = 4 \cdot 19 \cdot 1{,}0 + 56 \cdot 1 + 4 \cdot 14{,}0 = 188 \text{ cm}^2.$$

Die Randspannung σ berechnet sich dann mit

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} = \frac{37161}{188} + \frac{2118800}{3217} = 856 \text{ atm.}$$

Sie bleibt demnach unter der zulässigen Grenze.

2. Unter der Annahme, daß die Stehblechhöhe unverändert beibehalten wird, sollen jetzt zuerst diejenigen Querschnitte ermittelt werden, in denen die *obere* und darauf diejenigen, in denen auch die *untere* Gurtplatte theoretisch fehlen kann.

Die zugehörigen Widerstandsmomente sind (nach Böhm und John)

$$W_0 = 1618 \quad \text{und} \quad W_1 = 2428 \text{ cm}^3.$$

Unter Benutzung der Formel für f_e (Gl. 87) und des allgemeinen Ausdruckes für P könnte man unmittelbar die Abszissen x der Querschnitte berechnen, für welche obige Widerstandsmomente ausreichen würden. Einfacher (und für praktische Fälle ausreichend genau) gelangt man aber mit Hilfe der Gleichung

$$W = \frac{M + Pk}{\sigma}$$

zum Ziele, deren rechtsseitige Summe für alle Querschnitte bequem graphisch aufzutragen ist, wenn man k berechnet und für P Mittelwerte einführt.

Die Kernweiten k_0 und k_1 sind mit

$$k_0 = \frac{1618}{F_0} = \frac{1618}{188 - 4 \cdot 19 \cdot 1} = 14{,}45 \text{ cm}$$

und

$$k_1 = \frac{2428}{F_1} = \frac{2428}{188 - 2 \cdot 19 \cdot 1} = 16{,}19 \text{ cm}$$

anzuschreiben.

Die Achsenkraft bestimmt sich für $x = 0$ mit

$$P_a = K_a = \frac{100}{\sin \alpha_0} \left[\left(7 + \frac{5{,}5}{2} \right) 15 \right].$$

[1] B. Böhm und E. John, Widerstandsmomente von Blechträgern. S. 35.

Darin ist (Fig. 147):

$$\sin\alpha_0 = \frac{\operatorname{tg}\alpha_0}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_0}} = \frac{4f}{l\sqrt{1+\frac{16f^2}{l^2}}} = \frac{20}{30\sqrt{1+\frac{400}{900}}} = 0{,}554.$$

Das gibt

$$P_a = \frac{29250}{0{,}554} = 52798 \text{ kg}.$$

Für $x = \frac{l}{2}$ findet man

$$P_c = H = \frac{l^2}{8f}\left(\frac{1400}{2} + \frac{500\cdot 5}{2\cdot 2}\right) = 29812 \text{ kg}.$$

Setzt man an Stelle von M seinen Wert

$$M = 1250 f_e \text{ in mkg}$$

und außerdem $\sigma = \frac{900 \text{ kg}}{\text{cm}^2}$, so folgen aus

$$W = 139 f_{ex} + P_x \cdot k$$

die Gleichungen

$$W_0 = 1618 = 139 f_{ex} + \frac{14{,}45}{900} P$$

$$W_1 = 2428 = 139 f_{ex} + \frac{16{,}19}{900} P.$$

Die rechten Seiten dieser Ausdrücke sind graphisch darzustellen, dadurch, daß man über der Schlußlinie $a'c'$ der in Fig. 147 gezeichneten Fläche der Momenten-Grenzwerte die zu W_0 und W_1 gehörigen beiden Flächen der P (im entsprechenden Maßstabe) aufträgt. Dabei darf man die beiden P-Flächen (genau genug) allein mit Hilfe der oben berechneten Ordinaten P_a, P_m und P_c festlegen, deren Endpunkte dann durch gerade Linien zu verbinden sind. Die so erhaltene Gesamtfläche stellt dann die *Widerstandsmoment-Fläche* dar, deren Ordinaten $W_1 = 2428$ und $W_0 = 1618$ den Abszissen derjenigen Querschnitte entsprechen, in denen einerseits die *obere* und andererseits auch die *untere* Gurtplatte theoretisch fehlen darf.

b. Berechnung der Randspannungen unter Berücksichtigung der Bogenkrümmung.

1. Diese Berechnung hat mit Hilfe der Gl. (58) zu geschehen

$$\sigma = \frac{P_m}{F} + \frac{M_m}{F\varrho} + \frac{M_m \varrho y}{J_0(\varrho + y)},$$

worin für J_0 (nach **35**, a)

$$J_0 = J + \frac{1}{\varrho^2}\int y^4\left(1 + \frac{y^2}{\varrho^2} + \frac{y^4}{\varrho^4} + \right) dF$$

einzusetzen ist. Der Krümmungshalbmesser ϱ ist für $x = 7{,}02$ m zu berechnen.

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}.$$

Das gibt

$$\varrho = \frac{l^2[1 + 0{,}355^2]^{\frac{3}{2}}}{8f} = \frac{45}{2} \cdot 1{,}1948$$

oder

$$\varrho = 26{,}88 \text{ m}.$$

y ist gleich der halben Trägerhöhe, gleich 30 cm. Um J_0 festzustellen braucht man nur das erste Glied obiger Reihe zu berücksichtigen. Man erhält

$$J_0 = 30W + 2688^2 \left[2\int_{28}^{30} 19y^4 dy + 2\int_{20,5}^{27} 3 \cdot y^4 dy + 2\int_{0}^{20,5} 1 \cdot y^4 dy + 2\int_{27}^{28} 16 \cdot y^4 dy\right]$$

oder

$$J_0 = 30 \cdot 3147 + \frac{2}{5 \cdot 2688^2}[19 \cdot 30^5 - 3 \cdot 28^5 - 13 \cdot 27^5 - 2 \cdot 20{,}5^5].$$

Das ist

$$J_0 = 94410 + 0{,}000\,000\,005\,536\,[216\,287\,300]$$

oder

$$J_0 = 94410 + 1{,}197 = 94411 \text{ cm}^4.$$

Dies eingesetzt gibt schließlich

$$\sigma = \frac{37161}{188} + \frac{100 \cdot 21188}{188 \cdot 2688} + \frac{100 \cdot 21188 \cdot 2688 \cdot 30}{94411(2688 + 30)}$$

oder

$$\sigma = 197{,}7 + 4{,}19 + 665{,}8 = 868 \text{ atm},$$

also *nur* 12 kg *mehr als wenn der Bogen im Querschnitt bei m als gerade angesehen wird.*

§ 8. Berechnung des beiderseits eingespannten Tonnengewölbes als Dreigelenkträger.

Jede Einspannung (I. **14**) zählt gleich drei Stützenstäben. Danach ist eine beiderseits eingespannte Bogenscheibe ein dreifach statisch unbestimmtes System (I. **35**), dessen Berechnung also ohne die Ermittelung *elastischer* Formänderungen nicht möglich ist. Diese Berechnung bleibt dem III. Bande vorbehalten. Sie ist eine sehr umständliche, so daß es wohl zu verstehen ist, warum die Spannungen in gelenklosen Gewölben

heute meist noch mit Hilfe von Annäherungen *auf statisch bestimmtem Wege* ermittelt werden. Ehe nun die verschiedenen hierbei gebräuchlichen Methoden besprochen werden, empfiehlt es sich, die Zulässigkeit und den Nutzen solcher Näherungsrechnungen gegenüber den genaueren, auf der Elastizitätstheorie fußenden Rechnungen, nachzuweisen.

43. Einleitende Betrachtungen über die Grundlagen der Elastizitätstheorie.

a. Der normale Berechnungszustand eines Gewölbes. Die Theorie der Gewölbe kann ohne vorherige Betrachtung der die *Herstellung des Bogens* begleitenden Umstände kaum verständlich genug vorgetragen werden.

Wie bekannt, beginnt das Wölben eines Bogens in der Regel möglichst gleichzeitig und gleichmäßig von seinen Widerlagern (den Kämpferfugen) aus. Gewölbe aus natürlichen oder künstlichen Steinen werden dabei gewöhnlich in voller Bogenstärke bis zum Scheitel, wo der sog. Schluß stattfindet, aufgemauert. Die aus einer gleichmäßigen Masse hergestellten *Beton*gewölbe sind Schöpfungen der neuern Zeit und sind eigentlich erst möglich geworden, nachdem an Stelle des althergebrachten Bindemittels des *Kalk*mörtels der *Zement*mörtel getreten ist. Mit Hilfe des Zementes ist es möglich, selbst aus rauhen, unbearbeiteten kleinen Bruchsteinen ein elastisch gleichmäßig widerstandsfähiges Gewölbe herzustellen.

Das wichtigste Hilfsmittel bei der Herstellung eines Gewölbes ist das *Lehrgerüst.* Das Gerüst erhielt den Namen von einer seiner Aufgaben, wonach es eine *Lehre* für die genaue Herstellung der innern Wölblinie bilden soll. Daneben hat das Lehrgerüst zwei andere Aufgaben zu erfüllen:

1) die Last des noch nicht geschlossenen Bogens aufzunehmen,
2) nach erfolgtem Bogenschlusse das sog. *Ausrüsten* (Ausschalen) des Gewölbes zu gestatten, so daß dieses seine Last ganz allmählich und sicher auf die Widerlager übertragen kann.

Das Endziel der Herstellung eines Gewölbes geht nun dahin, den Bogen nach erfolgtem Schlusse und beendigtem Ausrüsten in derjenigen Gestalt zu erhalten, die dem Konstrukteur bei seiner *Berechnung* vorgelegen hat. Das Ziel kann aber niemals vollkommen erreicht werden, weil die Schwierigkeiten der Gewölbeherstellung und die unvermeidlichen, im voraus unmöglich genau zu berechnenden *elastischen* Veränderungen seines Gefüges sowohl während der Wölbung als auch nach erfolgtem Ausrüsten dies verhindern. Die erwähnten Schwierigkeiten wachsen mit der Spannweite des Bogens, so daß heute die sichere Herstellung eines

Gewölbes von großer Weite (etwa 50 m und darüber) mit Recht als ein Meisterstück der Ingenieurkunst gilt. Jedenfalls erfordert heute der Bau einer bedeutenden gewölbten Brücke vergleichsweise viel mehr Umsicht und umfassendere technische Einzelkenntnisse als der Bau einer gleich weit gespannten eisernen Brücke.

Unter der allmählich bis zum Bogenschlusse, fortschreitenden veränderlichen Belastung ist ein *Setzen* des Lehrgerüstes in seinen Verbindungsknoten sowie auch seine *elastische* Zusammendrückung zu erwarten. Dieser Umstand allein verursacht bereits eine *Veränderung der geplanten Gestalt der innern Wölblinie*, deren Größe man selbstverständlich durch besondere Gegenmittel — Überhöhung des Lehrgerüstes und seine vorherige künstliche Belastung — möglichst zu beschränken suchen wird. Weitere elastische Formänderungen vollziehen sich während des Ausrüstens, und auch später noch, als eine Folge des allmählichen völligen Erhärtens der Mörtelmassen und der elastischen Eigenschaften von Mörtel und Stein.

Ferner kommt noch die dauernde Schwankung des Wärmegrades der das Gewölbe umgebenden Luft in Betracht, besonders aber der Umstand, daß es praktisch unmöglich ist, das Gewölbe bei derjenigen mittlern Lufttemperatur (I. **14**, S. 15) zu schließen, welche für seine im Entwurfe vorgesehene Gestalt maßgebend gewesen war. Je nachdem also der Gewölbeschluß bei höherer oder niedrigerer Luftwärme erfolgt, als es die bei der Berechnung angenommene mittlere Gradzahl verlangt, wird der Scheitel der innern Wölblinie im Augenblicke des Schlusses höher oder tiefer zu liegen kommen, als es geplant war.

Endlich ist noch zu bedenken, daß auch die Steinmassen von Widerlagern und von Zwischenpfeilern elastisch sind und infolge dieser Eigenschaft auf die Bogengestalt formändernd zurückwirken. So kommen wir zum Schlusse, daß — auch abgesehen von Temperatureinflüssen — die wirkliche Bogengestalt immer von der bei der Berechnung zugrunde gelegten Gestalt mehr oder minder abweichen wird. Die Ursachen dieser Abweichungen, die nach dem Vorgange Winklers (**50**, c) die Bezeichnung »*Störungen*« erhalten haben, werden bei der Berechnung des Gewölbes nur insofern beachtet, als man je nach ihrer Bedeutung den *Sicherheitsgrad* der Konstruktion festsetzt (I, **7** und **12**), worüber weiterhin (unter **45**, b) nachzulesen ist. Danach berechnet man ein Gewölbe in seinem sog. *normalen Zustande*, *wobei man*, *bei unveränderlicher Luftwärme*, *alle Fugen völlig geschlossen und spannungslos und die Widerlager*, *sowie Pfeiler als unwandelbar fest* (*starr*, *vollkommen unelastisch*) *voraussetzt.*

b. Die drei Grundbedingungen des Gleichgewichts. Unter der Voraussetzung, daß der elastische Bogen mit einer starren Erdscheibe verbunden ist, bleibt die Lage der Einspannungen an den Kämpfern während der unter den Belastungen entstehenden Formänderungen des Gewölbes *unverändert*, d. h. es kann weder eine Drehung der Kämpferfuge noch eine Verschiebung eines ihrer Punkte vor sich gehen. In Wirklichkeit sind die Widerlager oder Pfeiler, zwischen denen sich das Gewölbe spannt, allerdings elastisch, sie dürfen aber hier als starr angesehen werden, weil ihre verschwindend kleinen Bewegungen die Rechnungsergebnisse nur unerheblich beeinflussen.

Wie im I. Bande (unter **35**, S. 69) allgemein dargelegt worden ist, geht ein m-fach statisch unbestimmtes System durch Beseitigung von m Stäben in das sog. *statisch bestimmte Hauptnetz* über. Die an Stelle der m Stäbe anzubringenden, vorläufig noch unbekannten Stabkräfte sind *die statisch nicht bestimmbaren Größen.* Im vorliegenden Falle ist die Unbestimmtheit eine *äußere.* Es sind daher drei (einer Einspannung gleichwertige) Stützenstäbe zu beseitigen (Fig. 148). Dadurch fällt die Einspannung einer der beiden Kämpfer, und um den gegebenen Belastungszustand wieder herzustellen, sind drei statisch nicht bestimmbare äußere Kräfte X, Y, Z anzubringen, denen die Aufgabe zufällt, die *vorhandene gegebene* Richtung kk der frei gemachten Kämpferfuge unverändert zu erhalten. Eine dieser äußern Kräfte muß daher ein Moment sein. Das sei X. Die beiden andern sind Einzelkräfte, die in der Trägerebene beliebig gelegt werden können. Anschaulich ist es, sich an die Kämpferfuge eine starre Scheibe S geschlossen zu denken, die durch die bezeichneten drei äußern Kräfte belastet ist (Fig. 148).

Die *Grundbedingungen* für die Elastizitätsberechnungen ergeben sich nun aus der Bestimmung der Lagenänderung, welcher die freigemachte Kämpferfuge infolge des Angriffes der statisch nicht bestimmbaren Größen X, Y, Z unterworfen ist. Diese Lagenänderung ist durch drei Gleichungen bestimmt, von denen eine die Verdrehung der Kämpferfuge und die beiden andern je eine geradlinige Verschiebung angibt. Nach unserer Voraussetzung soll aber die wirkliche Lage der Kämpferfuge

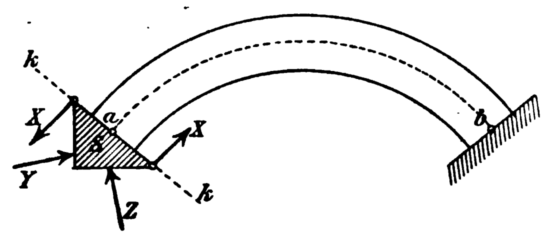


Fig. 148.

des statisch unbestimmten Systems unverändert erhalten bleiben. Setzt man also die für die drei Verschiebungen zu berechnenden analytischen Ausdrücke je für sich gleich Null, so erhält man dadurch drei Bedingungsgleichungen, aus denen die statisch nicht bestimmbaren Größen ermittelt werden können. X, Y und Z sind dadurch nach Größe und Lage so bestimmt, daß sie im Hauptnetz die Lage der Kämpferfuge unverändert erhalten.

Um die drei Bedingungsgleichungen abzuleiten, betrachte man irgend zwei um du voneinander entfernte Nachbarquerschnitte des Bogens im Punkte m (Fig. 149), die sich unter der Wirkung des durch die

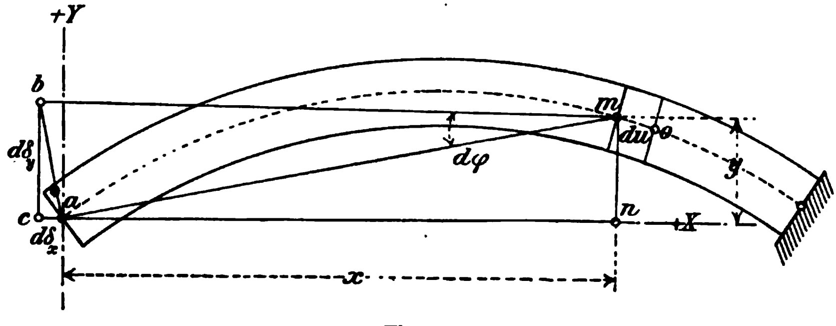


Fig. 149.

Belastung hervorgerufenen Momentes M_m um den unendlich kleinen Winkel $d\varphi$ gegeneinander verdrehen (**34**). Infolge dieser Verdrehung, die in der Figur in unendlich großem Maßstabe gezeichnet werden mußte, gelange der Kämpferpunkt a der Bogenachse nach b. Der unendlich kleine Bogenweg ab darf als Gerade angesehen werden. Betrachtet man ihn als Hypotenuse eines Dreiecks abc und nennt die lotrecht und wagerecht gestellten Katheten

$$\overline{bc} = d\delta_y$$
$$\overline{ac} = d\delta_x,$$

so ist die Verschiebung des Punktes a durch dessen Seitenbewegungen

$$d\delta_x, \; d\delta_y \text{ und } \overline{ma} \cdot d\varphi$$

geometrisch bestimmt.

Die Koordinaten des Punktes m seien x, y. Dann gibt es zwischen den Seiten der ähnlichen Dreiecke abc und mna (Fig. 149) die Beziehungen

$$\frac{d\delta_x}{\overline{ma} \cdot d\varphi} = \frac{y}{\overline{ma}}; \quad \frac{d\delta_y}{\overline{ma} \cdot d\varphi} = \frac{x}{\overline{ma}}.$$

Daraus folgt

$$d\delta_x = y \cdot d\varphi$$
$$d\delta_y = x \cdot d\varphi.$$

Es erübrigt noch $d\varphi$ in Beziehung zum Momente M_m zu bringen. Nach I. **103**, b (S. 328) ist die Spannung

$$\sigma = v\left(\frac{E}{\varrho}\right),$$

wenn v der Abstand einer Faser der Nachbarquerschnitte von der Nulllinie (hier die Bogenachse), E das Dehnungsmaß (I. **5**, b) und ϱ der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie im Punkte m bedeuten (**35**). Ferner ist (nach I. Gl. 97) für den vorliegenden Fall (Symmetrie des Querschnittes) und wenn der krumme Bogen bei m als ein gerader berechnet werden darf:

$$\sigma = \frac{M_m v}{J}.$$

Das gibt

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M_m}{EJ} \tag{90}$$

und weil

$$du = \varrho\, d\varphi$$

erhält man ferner

$$d\varphi = \frac{M_m}{EJ} du. \tag{91}$$

Setzt man den Wert von $d\varphi$ in obige Ausdrücke für dx und dy ein und *summiert* die drei in Frage stehenden Verschiebungen *für sämtliche Bogenquerschnitte*, so gelangt man schließlich zu den gesuchten Grundbedingungen der Elastizitätsberechnungen:

$$\begin{aligned} \int d\varphi &= \int \frac{M_m}{EJ} du = 0 \\ \int d\delta_x &= \int \frac{M_m}{EJ} y\, du = 0 \\ \int d\delta_y &= \int \frac{M_m}{EJ} x\, du = 0. \end{aligned} \tag{92}$$

Um hieraus die statisch nicht bestimmbaren Größen X, Y, Z berechnen zu können, braucht man noch eine Beziehung zwischen diesen und dem Momente Mm. Setzt man dann

$$M_m = f(X, Y, Z)$$

in obige drei Grundbedingungen ein, so erhält man dadurch die fehlenden *drei Elastizitätsgleichungen*, aus deren Verbindung mit den gegebenen

drei rein statischen Gleichgewichts-Bedingungen der Ebene, die sechs unbekannten Stützenkräfte der beiden Einspannungen zu berechnen sind. Wie das im einzelnen zu geschehen hat, braucht hier nicht näher dargelegt zu werden. Für den vorliegenden Fall genügt es, aus den Gleichungen (92) *die Bedingungen für die Lage der Mittelkraftlinie im Gewölbe* herzuleiten.

c. Die wirkliche Lage der Mittelkraftlinie im Gewölbe. Mittelkraftlinie und *Stützlinie* sind hier gleichbedeutend. Nach I. **64**, b ist die Mittelkraftlinie eine Stützlinie, deren Stützpunkte unendlich nahe nebeneinander liegen. Verfasser bevorzugt im allgemeinen die Benennung »Mittelkraftlinie«, weil sie deutlicher zum Ausdrucke bringt, um was es sich handelt.

Wir beschränken uns jetzt auf den Fall der lotrechten Belastung des Gewölbes und betrachten die Mittelkraftlinie für eine beliebige Stellung der Lasten. Sie kann gezeichnet werden, sobald die Bogenkraft H, sowie auch Richtung und Größe *einer* Kämpferkraft gefunden worden sind (**36**, Fig. 135). Dann besteht zwischen der Bogenkraft H und dem Momente M_m (wie unter **36**, a bewiesen wurde) die Beziehung

$$M_m = Hv\,,$$

wenn v der lotrecht gemessene Abstand zwischen Mittelkraftlinie und Bogenachse ist. Im Produkte Hv kann v als Kraft oder als Länge aufgefaßt werden (I. **60**, b, S. 136). H ist unveränderlich. Die Grundgleichungen können danach mit

$$\int \frac{v\,du}{EJ} = 0$$
$$\int \frac{vy \cdot du}{EJ} = 0 \qquad (93)$$
$$\int \frac{vx \cdot du}{EJ} = 0$$

angeschrieben werden. Die Integration hat sich über die Bogenachse ab (Fig. 149) zu erstrecken. Das Dehnungsmaß E ist in der Regel unveränderlich, so daß es in den Gleichungen (93) meist fortgelassen werden kann.

Sieht man v als Kraft an und bedenkt, daß du, E und J für jeden Querschnitt gegebene absolute Werte bedeuten, so kann man das Produkt $v\left(\frac{du}{EJ}\right)$ als eine *elastische Kraft* auffassen, deren *Vorzeichen* allein von M_m abhängig ist und die im Punkte m angreift. Bezeichnet man diese veränderliche elastische Kraft mit w, setzt also

$$w = v\left(\frac{du}{EJ}\right), \tag{94}$$

so erhält man aus den Gl. (93) die Bedingungen

$$\int w = 0; \quad \int w \cdot x = 0; \quad \int w \cdot y = 0. \tag{95}$$

Denkt man sich ferner die elastischen Kräfte w wagerecht angreifend, so stellen die letzten drei Summen eine Gruppe von Kräften dar, die im Gleichgewichte stehen, denn jede der Summen erfüllt eine der Gleichgewichts-Bedingungen: die Summe aller w in der Richtung einer Z-Achse ist Null; desgleichen die Summe der statischen Momente der w in Bezug auf die Y-Achse und auf die X-Achse ist je für sich gleich Null. Es fragt sich jetzt, *bei welcher Lage der Mittelkraftlinie diese Gleichgewichts-Bedingungen erfüllt werden.*

Die Bedingungen sind erfüllt, wenn alle w für sich Null sind, d. h. wenn $v = 0$, oder wenn die Mittelkraftlinie für die betrachtete Belastung mit der Bogenachse zusammenfällt. Das ist (nach **38**, a) nur bei ständiger Belastung möglich. Bei veränderlicher Belastung muß jede Mittelkraftlinie die Bogenachse *schneiden*, denn $\int w$ kann nur Null werden, wenn sowohl positive als auch negative w vorhanden sind, oder was dasselbe sagt, wenn sowohl positive als negative Momente im Bogen auftreten.

Es läßt sich nun folgender Satz beweisen:

Die Mittelkraftlinie muß die Bogenachse in mindestens drei Punkten, bei Symmetrie des Bogens und der Belastung in mindestens vier Punkten schneiden.

Angenommen, die Mittelkraftlinie schnitte nur in einem Punkte. Dann gibt es eine positive und eine negative Gruppe der Kräfte w, von denen jede ihre Mittelkraft hat. Die beiden Mittelkräfte fallen aber nicht in eine und dieselbe Gerade, können also nicht im Gleichgewicht sein (I. **46**).

Sind nur zwei Schnittpunkte vorhanden (Fig. 150), so gibt es drei Gruppen der Kräfte w, von denen die eine eine positive, die beiden andern zusammen eine negative Mittelkraft haben, oder umgekehrt. Gleichgewicht könnte demnach nur eintreten, wenn die positive Mittelkraft r_2 in die Richtung der Mittelkraft $(r_1 + r_3)$ von *beiden* negativen Kräftegruppen fiele. Das ist aber unmöglich, weil — wie die Fig. 150 zeigt — die Mittelkraft der negativen nicht mit der Mittelkraft der positiven Kräfte in einer Ebene liegen kann. Wenn aber drei Schnittpunkte

mit zwei positiven und zwei negativen Kräftegruppen vorhanden sind (Fig. 151), kann die Mittelkraft $(r_2 + r_4)$ der positiven gleich der Mittelkraft $(r_1 + r_3)$ der negativen Kräfte sein und dabei der Angriffspunkt beider in eine Linie fallen. Wenn man nämlich, wie es in der Fig. 151 geschehen ist, die Schwerpunkte s_1 und s_3 der ersten und dritten w-Fläche, sowie auch die Schwerpunkte s_2 und s_4 der beiden andern w-Flächen im Aufriß je durch eine Gerade verbindet, so schneiden sich diese in einem Punkte n. Somit besteht immer die Möglichkeit, daß beide Mittelkräfte, einerseits $-(r_1 + r_3)$ und anderseits $+(r_2 + r_4)$, gleich groß sind und dabei durch diesen — im Grundriß der Fig. 151 — mit n' bezeichneten Punkt verlaufen. Damit ist der obige Satz von der Lage der Mittelkraftlinie bewiesen.

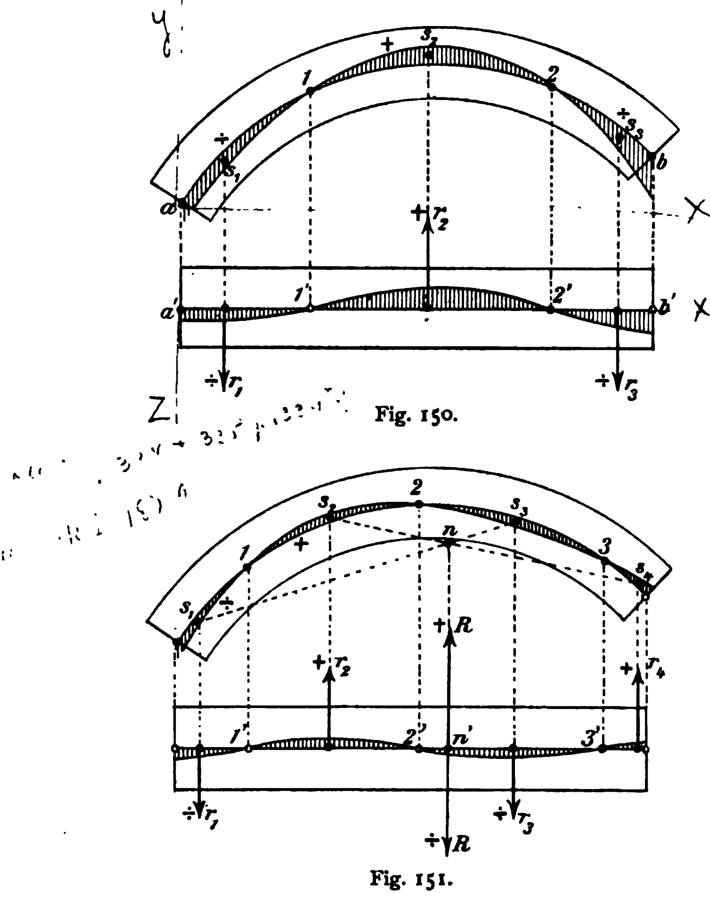

Fig. 150.

Fig. 151.

44. Näherungsrechnungen im allgemeinen.

a. Festlegen der günstigsten Bogenachse. Der aus der Elastizitätstheorie gewonnene Satz von der Lage der Mittelkraftlinie bestätigt, daß ebenso wie bei Dreigelenkträgern, es auch für gelenklose Gewölbe ratsam ist, die Bogenachse möglichst günstig zu krümmen. Als günstigste Bogenachse gilt auch hier diejenige, für welche alle Momente M_m, die aus dem Eigengewichte und der halben, über die ganze Stützweite gleichmäßig verteilten Verkehrslast herrühren, verschwinden. *Diese Art*

der Belastung soll von jetzt ab kurzweg die mittlere genannt we
Der heutige Gebrauch, die Bogenachse mit der allein aus Eigengewicht herrührenden Bogenkraft zu zeichnen, ist nicht empfehlenswert (**37**, a).

Für $M_m = 0$ werden die drei Grundbedingungen der Gl. (92) erfüllt, so daß die Mittelkraftlinie mit der günstigsten Bogenachse zusammenfällt. Man könnte meinen, dies brauche nicht der Fall zu sein, weil die Grundbedingungen auch für eine Mittelkraftlinie zu erfüllen wären, die mindestens drei- oder viermal die Bogenachse schnitte. Das ist aber unmöglich, denn in einem gegebenen Falle könnte die aus der Elastizitätstheorie hergeleitete Mittelkraftlinie entweder nur eine kleinere oder eine größere Bogenkraft geben, als diejenige, für welche die günstigste Bogenachse acb (Fig. 152) gezeichnet ist. Keine dieser beiden Mittelkraftlinien ($a_1 c_1$ und $b_2 c_2$) könnte aber so verschoben werden, daß dadurch ein mindestens viermaliges (oder dreimaliges) Schneiden der Bogenachse acb entstände. Höchstens würde ein zweimaliges Schneiden zu erreichen sein. Die Grundbedingungen (Gl. 92) lassen sich demnach nicht anders erfüllen, als durch Nullsetzen jeder der drei Bedingungs-Gleichungen. Mit andern Worten: *Die wahre Mittelkraftlinie muß mit der günstigsten Bogenachse in allen Punkten zusammenfallen.* Um die Bogenachse festzustellen, müssen die Bogenstärken im Scheitel und an den Kämpferpunkten vorläufig annähernd berechnet werden. Dabei ist die Lage dieser Bogenpunkte für die *innere Wölblinie* durch die Örtlichkeit des Baues als gegeben anzusehen. Die Einzelheiten der Berechnung folgen unter **45**.

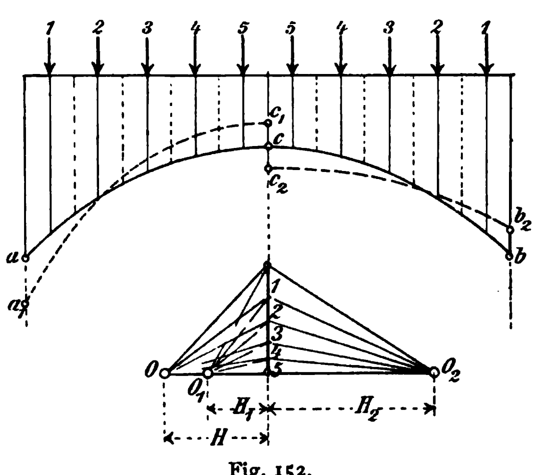


Fig. 152.

Nach obigem wird also immer eine für die mittlere Belastung gezeichnete Bogenachse als vorhanden vorausgesetzt. Deren Achsenkräfte sind (nach **36**, c) gegeben. Es bleibt also nur noch zu überlegen, *welche Mittelkraftlinie bei der Berechnung des Einflusses der Verkehrslast gelten soll.*

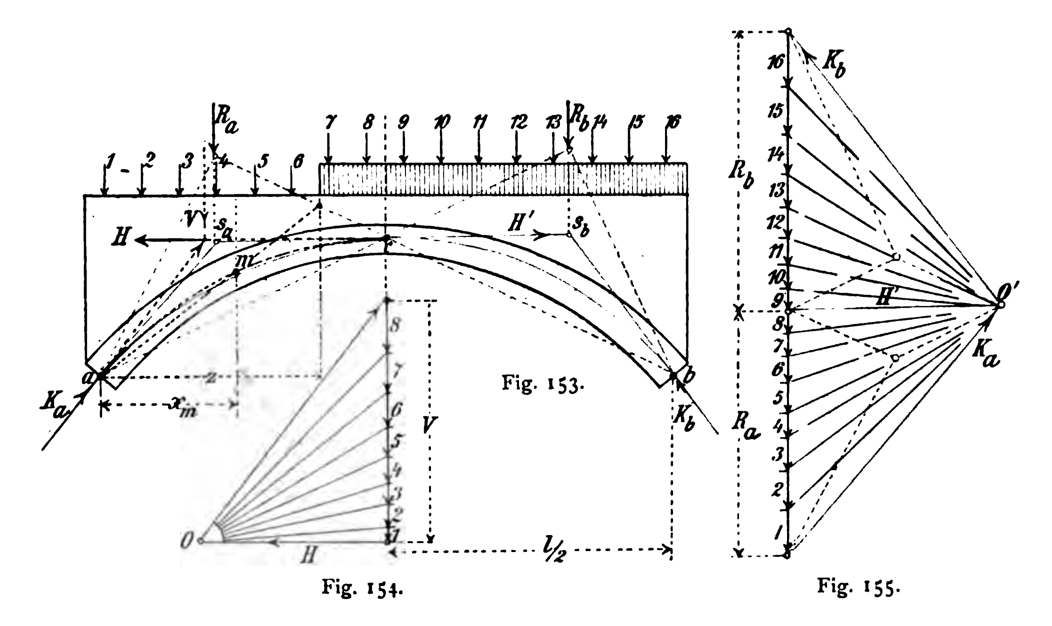
b. Wahl einer geeigneten Mittelkraftlinie für die Verkehrslast. Die nur mit Hilfe der Elastizitätstheorie zu ermittelnde wirkliche Lage der Mittelkraftlinie kommt hier nicht in Betracht. Es ist auch schwer möglich, durch Ausprobieren *nach dem Augenmaß* für einzelne Belastungsfälle Seillinien zu zeichnen, deren Lage den Elastizitäts-Bedingungen annähernd entspricht, weil ja die *Anzahl* ihrer Kreuzungen mit der Bogenachse vorher nicht bekannt ist. Bisher wurde nur festgestellt, daß die wahre Mittelkraftlinie *mindestens* drei (oder vier) Mal kreuzen muß. Auch ist daraus noch zu folgern, daß die größten Biegungsspannungen im Gewölbe — von außergewöhnlichen Fällen abgesehen — um so kleiner ausfallen müssen, je öfter die Bogenachse von der Mittelkraftlinie geschnitten wird, bis beim Zusammenfallen beider alle Momente verschwinden. Die Kenntnis dieser eigentümlichen Lage der wahren Mittelkraftlinie genügt aber, um darauf ein einfaches und sicheres Verfahren zur Bestimmung der Gewölbestärken zu begründen.

Die dem Verfahren zugrunde liegende *Mittelkraftlinie für einseitige Verkehrslast* wird, wie beim Dreigelenkbogen, durch den Scheitel und die beiden Kämpferpunkte der Bogenachse geführt. Die Annahme einer solchen statisch bestimmten Linie empfiehlt sich besonders deshalb, weil sie im allgemeinen etwas größere Bogenstärken liefert, als die Elastizitätstheorie. Das ist in vielen Fällen durch vergleichende Rechnungen nachgewiesen worden. TOLKMITT[1] war der erste, der die Berechnung gelenkloser Gewölbe auf derartiger Grundlage vorgeschlagen und erfolgreich begründet hat: er bestimmt zuerst die günstigste Bogenachse für die mittlere Belastung. Dann zeichnet er für einseitige Vollbelastung, die zwischen den Kämpfer- und Scheitellotrechten liegt, die erwähnte Mittelkraftlinie durch den Scheitel und die Kämpferpunkte der gefundenen Bogenachse und macht den Bogen so stark, daß dessen *Kern*linien von der Mittelkraftlinie nicht geschnitten werden.

Die von TOLKMITT danach der Berechnung zugrunde gelegte einseitige Verkehrslast ist aber *nicht die gefährlichste*. Das ist (unter **41**) mit Hilfe der Fig. 146 bewiesen worden. Verfasser hält es deshalb für folgerichtiger, *wenn die Mittelkraftlinie für diejenige einseitige Verkehrslast gezeichnet wird, die das größte Moment liefert.* Wie (unter **41**) gezeigt worden ist, muß dann die Verkehrslast über den Scheitel hinaus reichen, weil der gefährlichste Querschnitt in der Nähe der Mitte jedes der beiden Bogenschenkel liegt. Auch ist es in jedem Falle möglich,

[1] TOLKMITT, Leitfaden für das Entwerfen und die Berechnung gewölbter Brücken. 1895. 2. Aufl. 1903.

den für das Moment gefährlichsten Querschnitt unmittelbar und genau aufzufinden, ohne vorher die Mittelkraftlinie zu zeichnen. In dem weiterhin beschriebenen, und durch Zahlenbeispiele im einzelnen erläuterten Verfahren weicht demnach Verfasser insofern von TOLKMITT ab, als er die *Breite des Gewölbekerns nach derjenigen Mittelkraftlinie bemißt, die das größte Moment liefert* (Fig. 153). Dabei sind *Zug*spannungen entweder ganz auszuschließen, d. h. also die Mittelkraftlinie muß überall innerhalb der Kernlinien bleiben, oder solche werden bis zu einer gewissen Höhe zugelassen. Bei bedeutenden Gewölben verwendet man heute auf die Mörtelbereitung große Sorgfalt. Es wird dabei meistens



nur bester Portlandzement benutzt, dem man bei zehnfacher Sicherheit recht *wohl eine Zugbeanspruchung bis etwa* 2 atm. *zumuten darf.* Im eisenverstärkten Beton hat das Eisen die Zugspannungen voll aufzunehmen.

In Fig. 153—155 ist in roten Linien angedeutet, wie man eine Mittelkraftlinie erhält, die durch die drei Punkte a, b, c verläuft (nach I. **59**), nachdem zuvor die günstigste Bogenachse für die mittlere Belastung gefunden worden ist. Praktisch wird es zulässig sein, wenn man den gefährlichsten Querschnitt m bei $x_m = \frac{l}{4}$ annimmt. Genau ist x_m nach (**41**, b) zu berechnen. Das Krafteck der Fig. 154 diente zur Darstellung der Bogenachse amc. Das Krafteck der Fig. 155 gehört zur

ungünstigsten Mittelkraftlinie, deren Abstand vom m das größte Moment M festlegt, so daß $\pm M$ gleich groß werden. Im übrigen erklären die Fig. 153—155 sich selbst. Die *gefährlichste Lastlage* findet sich aus der Lastscheide der Einflußfläche, wobei z (nach Gl. 82 und 83) zu berechnen ist (vergl. **42**).

Es liegt auf der Hand, daß die ungünstigste wahre Mittelkraftlinie an keiner Stelle weiter von der Bogenachse abstehen kann, als eine nach obigem gezeichnete statisch bestimmt geführte Linie. Deshalb wird es auch zulässig sein, die *Bogenquerschnitte im Scheitel und an den Kämpfern* allein aus den zuhörigen Achsenkräften H und K für Vollbelastung der ganzen Bogenweite zu berechnen. Es werden zwar in diesen Querschnitten in Wirklichkeit immer auch Momente entstehen, sie sind aber kleiner als das berechnete größte Moment für den nach dem in Rede stehenden Annäherungsverfahren gefährlichsten Querschnitt m (Fig. 153). Um also völlige Sicherheit zu haben, genügt es die Stärke dieses gefährlichsten Querschnittes zuerst festzulegen, um die Scheitel- und Kämpferstärken danach richtig bemessen zu können. Bezeichnet man die Mittelkraft in m mit R_m, so ist es am einfachsten dabei das Verhältnis

$$H : R_m : K = d_c : d_m : d_a \tag{96}$$

zugrunde zu legen, wenn die auf der rechten Seite der Gleichung genannten Bogenstärken der Reihenfolge nach für den Scheitel c, den Querschnitt m und den Kämpfer a gelten. Werden die Bogenstärken derart bemessen, so ist ausreichende Sicherheit gegen das Eintreten unzuverlässiger Randspannungen vorhanden. In den meisten Fällen werden aber die vorläufig, behufs Festlegen der Bogenachse bereits angenähert berechneten Scheitel- und Kämpferstärken ausreichend sein. Sie sind deshalb beizubehalten, wenn nicht etwa nach Gl. (96) eine Vergrößerung notwendig erscheint.

45. Vorläufige Berechnung der Bogenstärken.

a. Näherungsformeln. Um die Bogenachse günstig festzulegen, müssen die Scheitel- und Kämpferstärken vorläufig ermittelt werden, einerlei ob man nach der Elastizitätstheorie oder statisch bestimmt vorgeht.

Der allgemeine Ausdruck für die Scheitelkraft oder Bogenkraft H einer beliebigen Seillinie für parallele stetige Lasten lautet (nach I. **65**, a, Gl. 34)

$$H = q\varrho \cos^3 \varphi. \tag{97}$$

Darin ist q die *volle* Last für die Einheit der Bogenweite, ϱ der Krümmungshalbmesser der Linie in einem beliebigen Punkte m, φ der Winkel, den ϱ mit der Lotrechten einschließt. H ist als Polweite des

zur Seillinie gehörigen Kraftecks unveränderlich, deshalb erhält man die Größe der Bogenkraft im Scheitel aus der Gleichung

$$H = q_0 \varrho_0,$$

worin q_0 und ϱ_0 sich auf den Scheitel beziehen, wo φ verschwindet.

Die unbekannte Bogenstärke im Scheitel sei d_c, die zulässige Spannung des Wölbsteinstoffes sei σ. Dann gilt für ein Bogenstück von 1 m Tiefe zur Bildebene die Bedingung

$$H = 1 \cdot d_c \sigma = q_0 \varrho_0. \tag{98}$$

Der Krümmungshalbmesser ϱ_0 ist noch unbekannt. Es kommt also darauf an, ihn aus den gegebenen Stücken zu berechnen. Da nun in jedem Entwurfe zuerst die Gestalt der *inneren* Wölblinie angenommen werden muß, so kann man den Krümmungshalbmesser r im Scheitel der inneren Wölblinie als gegeben ansehen. Es käme also nur darauf an, das Verhältnis zwischen ϱ und r festzustellen.

In Fig. 156 seien X und X' zwei Abszissenachsen, von denen X die Bogenachse und X' die innere Wölblinie im Scheitel berührt. aa' sei eine beliebige, senkrecht zur Bogenachse gelegte Fugenrichtung, die mit der Lotrechten den Winkel φ bildet; a' sei ihr innerer Randpunkt, a ihr Achsenpunkt, so daß $\overline{aa'} = \frac{d_a}{2}$ wird.

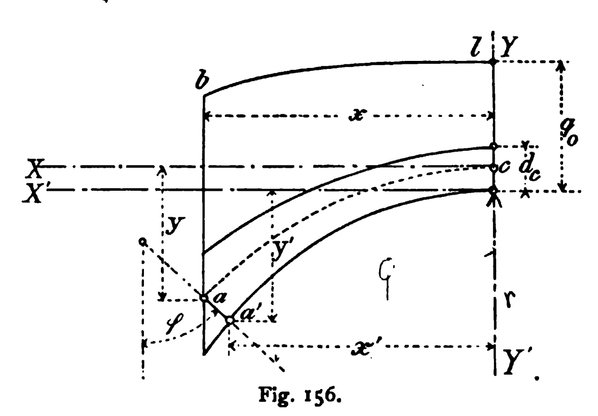


Fig. 156.

Dann lauten die Gleichungen der beiden in Vergleich zu ziehenden Krümmungshalbmesser für die Punkte a und a' der Koordinaten x, y und x', y'

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

und

$$\varrho' = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y'}{(dx')^2}}. \tag{99}$$

Wenn nun vorausgesetzt wird, daß 1) die Bogenachse mit der für die gegebene beliebige Belastungslinie bl gezeichneten Mittelkraftlinie zusammenfällt und 2) die Bogenstärke $d_a = 2 \cdot \overline{aa'}$ nach Maßgabe der Gl. (96) der Bedingung

$$d_a = \frac{d_c}{\cos\varphi}$$

entspricht (Fig. 157), so ist anzuschreiben:

$$y - \frac{d_c}{2} = y' - \frac{d_a \cos\varphi}{2} = y' - \frac{d_c}{2}$$

oder

$$y' = y.$$

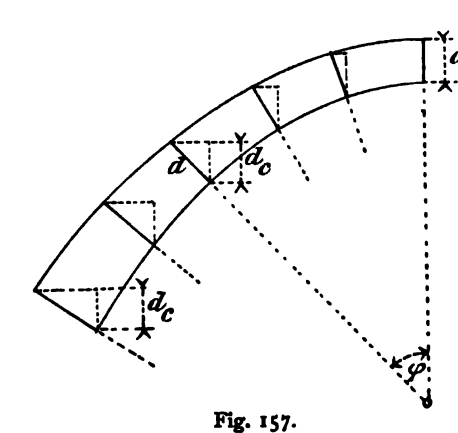


Fig. 157.

Ferner

$$x' = x - \frac{d_c \operatorname{tg}\varphi}{2}$$

oder

$$x' = x - \frac{d_c}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Daraus erhält man durch Differentiieren:

$$dx' = dx - \frac{d_c}{2}\,\frac{d^2y}{dx}$$

$$dx' = dx\left(1 - \frac{d_c}{2}\,\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Für den Gewölbescheitel verschwindet $\frac{dy}{dx}$, ϱ geht in ϱ_0 und ϱ' in r über. Das gibt

$$\varrho_0 = \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$

und (100)

$$r = \frac{1}{\frac{d^2y'}{(dx')^2}}.$$

Es ist aber

$$d^2y' = d^2y$$

und

$$(dx')^2 = dx^2\left(1 - \frac{d_c}{2\varrho_0}\right)^2.$$

Dies mit den Gl. (100) verbunden gibt

$$d^2 y = \frac{dx^2}{\varrho_0} \quad \text{und} \quad d^2 y = \frac{(dx')^2}{r}$$

oder

$$r = \varrho_0 \left(1 - \frac{d_c}{2\varrho_0}\right)^2.$$

Weil aber $\left(\frac{d_c}{2\varrho_0}\right)^2$ immer ein sehr kleiner echter Bruch ist, so darf man schließlich anschreiben

$$r = \varrho_0 - d_c$$

oder

$$\varrho_0 = r + d_c. \tag{101}$$

In Verbindung mit der Gl. (98) erhält man jetzt

$$1 \cdot d_c \cdot \sigma = q_0 (r + d_c)$$

und daraus folgt schließlich die Näherungsformel für die Scheitelstärke:

$$d_c = \frac{q_0 r}{\sigma - q_0}.$$

Um die Formel für den praktischen Gebrauch bequem herzurichten, kann man (wie unter **39** bereits an einem Beispiele durchgeführt wurde) die *innere* Wölblinie vorläufig *als Parabel* annehmen. Deren Krümmungshalbmesser im Scheitel ist gleich ihrem Parameter. Setzt man

$$r = \frac{l_0^2}{8 f_0},$$

worin l_0 die *Licht*weite und f_0 der dazu gehörige Pfeil der innern Wölblinie ist, so erhält man

$$d_c = \frac{q_0 l_0^2}{8 f_0 (\sigma - q_0)}. \tag{102}$$

Weiter ist zu bedenken, daß die günstigste Bogenachse, je nach dem Pfeilverhältnis $\frac{f_0}{l_0}$ des Gewölbes, eine von der Parabel verschiedene innere Wölblinie verlangt. Je flacher der Bogen, desto mehr nähert sich die innere Wölblinie der Parabel, je steiler der Bogen, desto weniger. Um diesem Umstande Rechnung zu tragen, und um für *ganz kleine* Weiten mindestens eine Scheitelstärke von etwa 0,25 m zu erhalten, empfiehlt Verfasser, die Gl. (102) für den praktischen Gebrauch noch durch das Glied $+ 0{,}20\left(1 + \frac{f_0}{l_0}\right)$ zu ergänzen. Die Gl. (102) nimmt dann die Form

$$d_c = \frac{q_0 l_0^2}{8 f_0 (\sigma - q_0)} + 0{,}20\left(1 + \frac{f_0}{l_0}\right) \tag{103}$$

an. Andere Näherungsformeln sind *im Anhange* (§ 11) zu vergleichen. Wesentlichen Einfluß auf das Ergebnis der Näherungsformel hat die *Wahl der zulässigen Spannung.*

Im Beispiel **39**, b war die Lichtweite l_0 etwa 23 m, $f_0 = 5{,}5$ m; *volle* Belastungshöhe $q_0 = 2{,}5$ m. Das Gewicht des cbm der Wölbsteine war 2,0 t; zulässige Spannung $\sigma = 10$ atm. Daraus berechnet sich

$$d_c = \frac{2{,}5 \cdot 2000 \cdot 23^2}{8 \cdot 5{,}5\,(100\,000 - 2{,}5 \cdot 2000)} + 0{,}20\left(1 + \frac{5{,}5}{23}\right) = 0{,}88\,\text{m}.$$

b. Wahl der zulässigen Spannung. Den Lesern ist zu empfehlen, vor dem Studium dieses Absatzes die hierher gehörigen Darlegungen des I. Bandes (unter **7** und **12**) durchzusehen. Im besondern ist der für alle Konstruktionen gültige Grundsatz zu beachten, nach welchem mit dem Wachsen des Verhältnisses zwischen Eigengewicht und Verkehrslast auch die zulässige Spannung größer zu nehmen ist. Danach wird es für *Stein*bauten noch mehr als für Eisenbauten notwendig, die zulässige Spannung mit wachsender Bogenweite entsprechend größer zu wählen, weil mit dem Wachsen der Größe des Eigengewichtes der *Einfluß der Achsenkräfte denjenigen der Momente mehr und mehr überwiegt.*

Bei der Bemessung der zulässigen Spannung wird auch noch zu beachten sein, daß die wahre Mittelkraftlinie im allgemeinen nicht durch die Scheitel- und Kämpferpunkte der Bogenachse verläuft, weshalb außer der Achsenkraft H und K im Scheitel und an den Kämpfern auch noch ein Moment zur Berechnung kommen müßte. Die Momente können für Vollbelastung aber nur sehr klein sein. Es wird deshalb wohl ausreichen, das Mehr der dadurch verursachten Druckspannungen durch die Wahl einer entsprechend niedrigen zulässigen Spannung auszugleichen.

Schließlich bleibt noch zu bedenken, wie die Sicherheit eines Bogens durch Zufälligkeiten oder Fehler bei der Herstellung, sowie auch durch unvorhergesehene Vorkommnisse im Betriebe der Konstruktion leiden kann. Mangelhafte Gründung eines Baues ist oft schon Ursache seines Einsturzes geworden. Diese und andere Umstände sind besonders gefährlich für Steingewölbe, weil jede Änderung in den bei der Berechnung des Bogens zugrunde gelegten Maßen und Gewichten eine Verschiebung der augenblicklichen Mittelkraftlinie zur Folge haben muß. Temperaturänderungen, geringe Verdrückungen im Untergrunde, sowie auch starkes elastisches Ausweichen der (bei der Berechnung als starr angesehenen) Widerlager bewirken ein Heben oder Senken der Mittelkraftlinie im

Scheitel und an den Kämpfern. So können unter ungünstigen Umständen gewisse *Grenzlagen der Mittelkraftlinie* entstehen, deren Eintreten die Sicherheit des Bogens gefährdet oder gar dessen Einsturz herbeiführt. Diese Grenzlagen werden weiterhin noch ausführlich besprochen werden. Hier wird es genügen darauf hinzuweisen, daß ihre Gefahren unter sonst gleichen Umständen *mit dem Wachsen der Bogenkraft, d. h. also mit dem Kleinerwerden des Verhältnisses zwischen Pfeilhöhe und Bogenweite im allgemeinen zunehmen.* Aus dem Gesagten ist zu entnehmen einerseits, wie schwierig es ist, für einen *Stein*bogen den *Sicherheitsgrad* passend zu bestimmen, anderseits aber auch, daß dieser in der Regel kleiner zu wählen ist, als unter sonst gleichen Umständen für einen Eisenbogen.

Die zulässige Spannung σ schwankt heute bei ausgeführten bedeutenden Steingewölben für Weiten *bis* 90 m zwischen

$$\sigma = 10 \text{ bis } 60 \text{ atm.}$$

Maßgebend für die Wahl des Sicherheitsgrades ist dabei nicht allein die Druckfestigkeit der Wölbsteine, sondern vielmehr ihres Verbindungsmittels, des Mörtels. Das gilt auch für Betonbogen u. dergl. Geringer als die Druckfestigkeit des Verbindungsmittels darf natürlich auch diejenige der natürlichen oder künstlichen Wölbsteine nicht sein. Die höchste heute zugelassene Spannung von 60 atm entspricht der Druckfestigkeit besten Portlandzement-Mörtels und etwa einem Sicherheitsgrade von $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{15}$.

Eine anerkannt brauchbare Formel zur vorläufigen Berechnung von σ für verschiedene Weiten und Gewölbeanordnungen gibt es zur Zeit noch nicht. Man behilft sich meist mit einer Festsetzung von Fall zu Fall, wobei die Druckfestigkeit der preiswert zu Gebote stehenden Steine natürlich immer die erste Rolle spielen wird.

Verfasser gibt in seinen Vorlesungen eine Formel für die zulässige Spannung, worin diese im einfachen Verhältnis zur Größe der Lichtweite l_0 wächst und worin außerdem der Tatsache Rechnung getragen wird, daß mit dem Kleinerwerden des Verhältnisses $\frac{f_0}{l_0}$ die oben geschilderten zufälligen Störungen im Gleichgewicht des Gewölbes gefährlicher werden. Die Formel lautet

$$\sigma = 0{,}6\left(l_0 + \frac{f_0}{2}\right). \tag{104}$$

Sie gibt σ in atm, wenn l_0 und f_0 in Metern eingesetzt werden. Danach erhält man z. B. für einen Bogen von 90 m Weite und 9 m Pfeil

$$\sigma = 0{,}6\,(94{,}5) = 56{,}7 \text{ atm.}$$

Für dieselbe Weite bei 18 m Pfeil

$$\sigma = 0{,}6\,(99{,}0) = 59{,}4 \text{ atm.}$$

Bei Halbkreisbogen dürfte der Pfeil nur von der sog. *Bruchfuge* (**46**. a. 4) ab gerechnet werden. Für einen Halbkreisbogen von 25 m Weite berechnet sich also

$$\sigma = 0{,}6\left[25{,}0 \cdot \cos 30^0 + \tfrac{1}{2} \cdot 12{,}50\,(1 - \sin 30^0)\right] = 14{,}9 \text{ atm.}$$

Schließlich ist beim Gebrauche der Formeln für d_c und σ wohl zu beachten, daß erfahrungsmäßig auch zwischen der Scheitelstärke d_c und der Bogenweite ein nur innerhalb enger Grenzen veränderliches Verhältnis angemessen ist. Darüber ist im Anhange (§ 11) nachzulesen. Danach schwankt das Verhältnis $\frac{l}{d_c}$

bei *Straßen*brücken zwischen etwa 20 und 50
- *Eisenbahn*brücken - - 20 - 40

und im allgemeinen wächst es mit der Bogenweite.

46. Grenzlagen der Mittelkraftlinie im Gewölbe. Die wirkliche Lage der Mittelkraftlinie wird nach erfolgter Herstellung des Gewölbes, je nach Umständen, mehr oder weniger von der berechneten abweichen. Das ist eine unvermeidliche Tatsache, die durch entsprechende Wahl des Sicherheitsgrades unschädlich gemacht werden muß. Unter den geschilderten, besonders ungünstigen Umständen kann die Mittelkraftlinie sogar Lagen einnehmen, die den dauernden Bestand des Bogens gefährden. Die *Kennzeichen* solcher Grenzlagen festzustellen, hat daher einige Bedeutung. Man unterscheidet die Mittelkraftlinien *der kleinsten und größten Bogenkraft*, sowie auch ihre Grenzlagen im Augenblicke *des Gewölbeeinsturzes.* Am anschaulichsten stellt man sie vorerst im *starren* Bogen dar, weil in einem solchen auch eine Berührung zwischen Wölblinie und Mittelkraftlinie eintreten, während in einem *elastischen* Bogen kein Stützpunkt dem Bogenrande zu nahe liegen darf, damit nicht in dem betreffenden Randpunkte die zulässige Druckspannung oder gar die Druckfestigkeit überschritten wird.

a. Linien der kleinsten und größten Bogenkraft.

1. *Eine ganz innerhalb der Randlinien des Gewölbes liegende Mittelkraftlinie entspricht weder der kleinsten noch der größten Bogenkraft.*

Dieser Satz ist aus den Fig. 158—159 zu beweisen. Die darin *punktiert* gezeichnete Mittelkraftlinie läßt sich, *ohne daß dabei H und K geändert werden*, nach oben oder nach unten schieben, bis die Linie einen Punkt o oder u der Randlinie berührt. Im ersten Falle (Fig. 158)

kann man dann die Bogenkraft *H verkleinern*, im zweiten Falle (Fig. 159) sie *vergrößern*. Die punktierte Mittelkraftlinie entspricht also weder der größten noch der kleinsten Bogenkraft.

2. *Eine Mittelkraftlinie, die mit einer Randlinie nur einen einzigen Punkt gemeinsam hat, entspricht weder der kleinsten noch der größten Bogenkraft.*

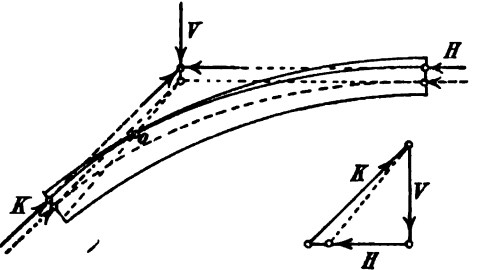


Fig. 158.

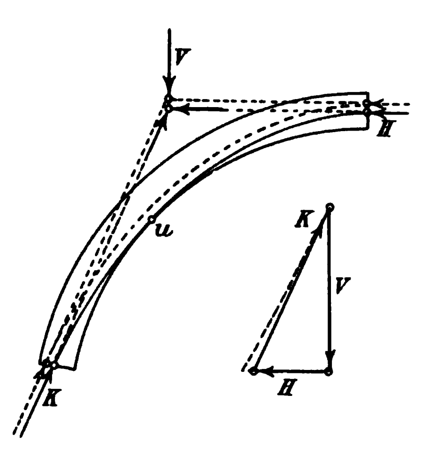


Fig. 159.

Der Beweis hierfür ist ebenfalls aus den Fig. 158 bis 159 zu entnehmen. Die Mittelkraftlinie in Fig. 158 berührt die obere Randlinie im Punkte *o*. Man kann die Linie, ohne *H* und *K* zu ändern, nach unten verschieben, so daß sie ganz innerhalb der beiden Randlinien zu liegen kommt. Nach dem 1. Satze entspricht sie also weder der kleinsten noch der größten Bogenkraft. Für die in der Fig. 159 gezeichnete, die untere Randlinie im Punkte *u* berührende Mittelkraftlinie ist der 2. Satz ebenso zu beweisen, indem man die Linie nach oben schiebt.

3. *Eine Mittelkraftlinie, die mit jeder der beiden Randlinien einen Punkt gemeinsam hat, entspricht der kleinsten oder größten Bogenkraft. Je nachdem dabei der obere Berührungspunkt in der obern oder untern Randlinie liegt, ist sie eine sog. Minimal- oder Maximal-Stützlinie.*

Die Linie in Fig. 161 ist eine *Minimal*-Stützlinie. Man kann sie zwar nach unten schieben, ohne dabei *H* und *K* zu ändern, und darauf *H* derart *vergrößern*, daß die Linie wieder innerhalb zu liegen kommt. Aber man kann die Bogenkraft *nicht mehr verkleinern*, weil bei einem Versuche dies zu tun, also beim Schieben der Linie nach oben, diese wohl durch vergrößern aber nie durch verkleinern der Bogenkraft wieder ganz zwischen die Randlinien gebracht werden kann.

Ebenso beweist man den 3. Satz für die in der Fig. 160 dargestellte *Maximal*-Stützlinie. Durch Aufwärtsschieben und *Verkleinern* von H kann man sie zwischen die Randlinien bringen, aber nie durch abwärtsschieben und vergrößern.

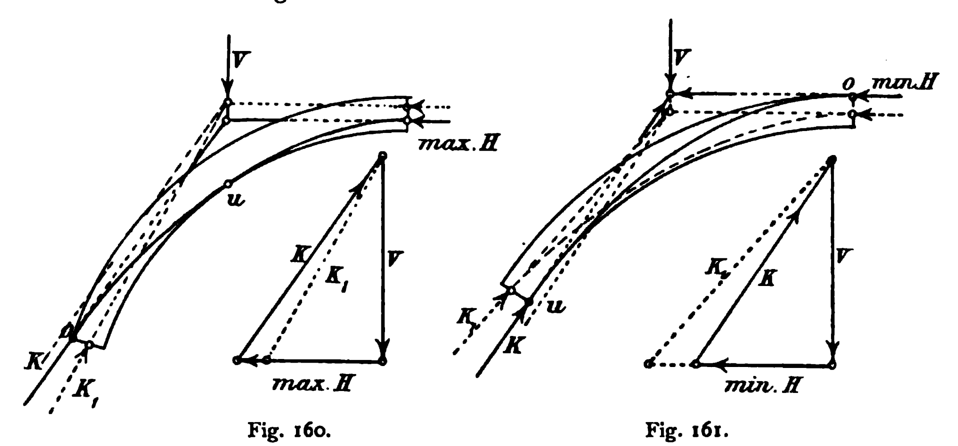


Fig. 160. Fig. 161.

4. In den Fig. 162—163 sind für einige gebräuchliche Bogenformen Maximal- und Minimal-Stützlinie dargestellt, jene in der rechten, diese in der linken Bogenhälfte. Im *Stich*bogen (Segmentbogen) (Fig. 162 oben), dessen Zentriwinkel kleiner als 120° ist, liegen die obern und auch die untern Berührungspunkte im Scheitel oder am Kämpfer. Beim *Voll*bogen (Zentriwinkel über 120° bis 180°) berührt die Minimallinie (Fig. 162 unten) die untere Wölblinie in einem Punkte u, dessen Krümmungshalbmesser mit der Lotrechten etwa einen Winkel $\varphi = 60°$ einschließt. Die Fuge in der Nähe dieses Punktes wird die *Bruchfuge* genannt, weil hier zuerst die Gefahr einer Zerstörung des Gewölberandes zu befürchten

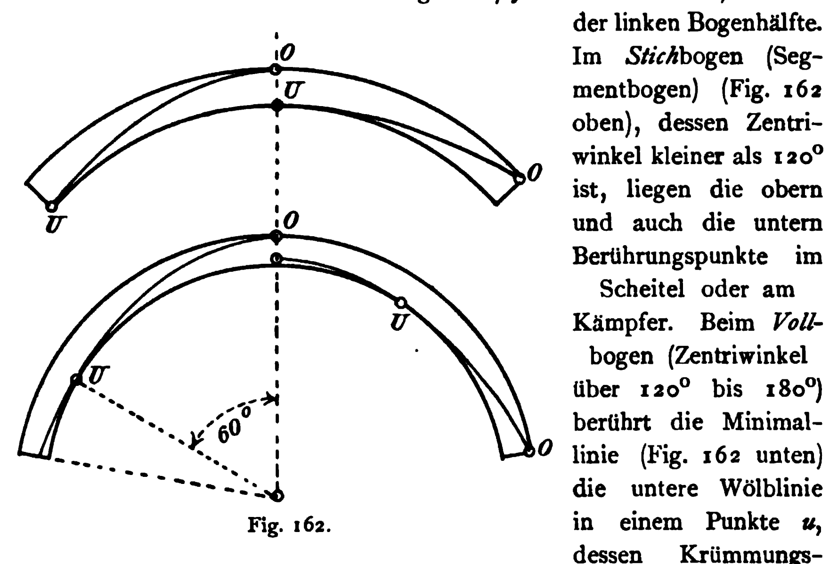


Fig. 162.

ist (**47**, a). Der obere Berührungspunkt der Maximallinie liegt hier im allgemeinen zwischen Scheitel und Kämpfer.

Fig. 163 veranschaulicht den sog. *gotischen* Bogen. Hier liegen bei der Maximalstützlinie die Berührungspunkte im Scheitel und Kämpfer, während sie bei der Minimalstützlinie zwischen Scheitel und Kämpfer fallen. Es ist überhaupt schwer, in einem solchen Bogen irgend eine Stützlinie zu zeichnen, die ganz zwischen die Randlinien fällt, ohne die Bogenstärke unnötig groß zu machen. Das gelingt nur, wenn man die Scheitelbelastung verhältnismäßig viel schwerer hält als diejenige an den Kämpfern. Bei dem 15 m weiten gotischen Bogen in einem Portale der neuen Dirschauer Weichselbrücke liegen aus diesem Grunde in der Scheitelübermauerung sehr schwere Steine, während zu ihren beiden Seiten bis zu den Kämpfern hin mit Hohlsteinen gemauert ist.

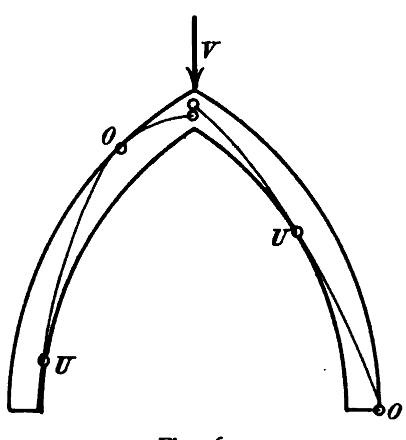


Fig. 163.

5. Die praktische Bedeutung der Maximal- und Minimal-Stützlinien und ihre Verwendung bei der Berechnung von Gewölben, Pfeilern und Widerlagern wird unter **47** erläutert.

b. Grenzlagen beim Gewölbeeinsturz.

1. Der hier zu betrachtende starre Bogen sei aus lauter durch *mörtellose* Fugen von einander getrennten Wölbsteinen hergestellt, sodaß also nur die Druckzone widerstandsfähig ist (I. **122**, **123**). Wenn in einem solchen Bogen die Stützlinie in irgend einem Querschnitte durch einen der beiden Kernpunkte verläuft, so entsteht in dem gegenüber liegenden Randpunkte (I. **108**) die Spannung $\pm$ Null. Überschreitet die Stützlinie den Kernpunkt, so beginnt die Druckzone schmäler zu werden und die mörtellose Fuge des gegenüber liegenden Randpunktes ist bestrebt sich zu öffnen, weil die Zugzone des Querschnittes versagt. Im elastischen Bogen spielt sich der gleiche Vorgang ab, sobald die Festigkeit des Verbindungsmittels der Zugzone überschritten und deshalb ein Reißen oder Öffnen der betreffenden Wölbfuge eintreten muß. Der Standfestigkeit des elastischen Bogens tut ein derartiges Öffnen oder Reißen in einzelnen Fugen keinen Abbruch, wenn nur die Druckzone dabei ausreichenden Widerstand leistet.

Rückt nun die Stützlinie in irgend einem Querschnitte so nahe an eine Randlinie heran, daß dort die Randspannung größer wird als die Druckfestigkeit des Wölbmaterials, so tritt an dieser Stelle im elastischen Bogen eine teilweise Zerstörung der zu hoch gepreßten Steinkanten ein. Diese wird so lange um sich greifen, bis ihre Ursache, die Überschreitung der Festigkeit in der Gewölbkante der Druckzone, beseitigt ist. Geschieht dies nicht durch Zurückweichen der Stützlinie, so schafft sich das Gewölbe durch die beregte Zerstörung selbst eine Stützfläche, die groß genug ist, um sicher genug zu tragen. Wenn ein solcher Vorgang sich in mehreren Querschnitten eines elastischen Bogens abspielt, so hat das aber immer noch nicht den Gewölbeeinsturz zur notwendigen Folge.

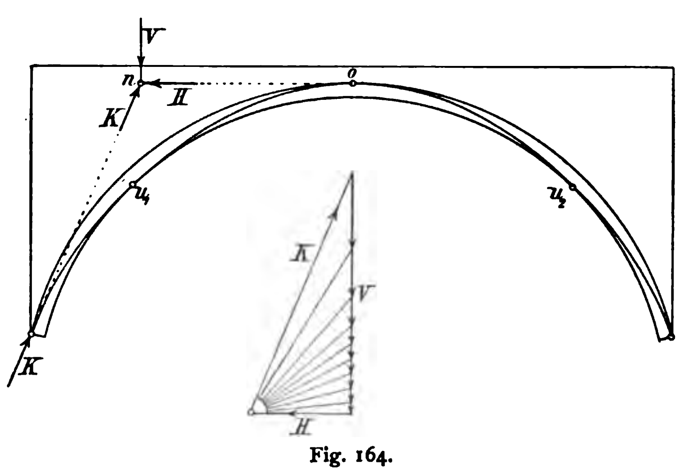


Fig. 164.

2. *Im starren symmetrischen Gewölbe wird die Grenze des Gleichgewichtes erreicht, wenn die Mittelkraftlinie (Stützlinie) mit den Randlinien im ganzen fünf Punkte gemeinsam hat, wobei diese abwechselnd in der obern und untern Randlinie liegen. Beim unsymmetrischen Gewölbe brauchen nur vier solcher gemeinsamer Berührungspunkte vorhanden zu sein* (Fig. 164—165). Für das elastische Gewölbe gilt im wesentlichen der gleiche Satz, nur ist nach obigem klar, daß in einem solchen das Gleichgewicht schon gestört werden wird, ehe die Stützlinie die beschriebene Grenzlage ganz erreicht.

Die Fig. 164—165 veranschaulichen zweierlei Arten des Gewölbeeinsturzes. Fig. 164 stellt den *Sturz nach außen* und Fig. 165 den *Sturz nach innen* dar. Bei jenem kanten die beiden untern Bogenteile nach außen, bei diesem dagegen nach innen, wobei sie sich um die

betreffende Kämpferkante drehen. Dabei fallen bei jenem die beiden mittlern Bogenteile nach unten, während sie bei diesem nach oben steigen.

Besonders bemerkenswert ist, daß *beide Stützlinien sowohl der kleinsten als der größten Bogenkraft entsprechen, also die einzigsten Mittelkraftlinien sind, die sich innerhalb der Randlinien zeichnen lassen.* Beim Sturz nach außen entspricht die Stützlinie der beiden obern Bogenteile der kleinsten, die Stützlinie in jedem untern Bogenteil der größten Bogenkraft. Beim Sturz nach innen liegt die Maximal-Stützlinie oben, während die beiden untern Linien Minimallinien sind.

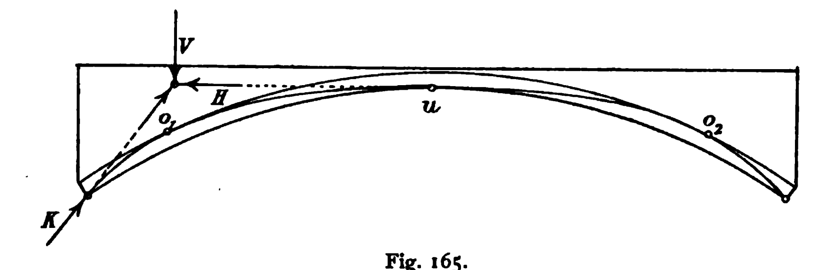


Fig. 165.

In der Regel erfolgt ein Gewölbeeinsturz nach außen. Nur ausnahmsweise, wenn von außen her übermäßige wagerechte Kräfte wirken, wie Erd- oder Wasserdruck, vielleicht auch die Kämpferkraft eines anstoßenden größeren Gewölbes, wird der Einsturz nach innen erfolgen, wenn die bei sinkender Mittelkraftlinie im Scheitel auf ihren Größtwert angewachsene Bogenkraft das Gleichgewicht nicht herzustellen vermag.

3. *Die Verwendung der Minimal- und Maximal-Stützlinie* für die Berechnung von Bogenstärken, sowie auch von Pfeilern und Widerlagern wird in der folgenden Nummer **47** behandelt.

47. Widerlager und Pfeiler im Zusammenhange mit dem Gewölbe.

a. Standwiderlager und verlorene Widerlager. Es gibt zwei verschiedene Arten von Widerlagern: *Stand*widerlager und *verlorene* Widerlager. Das Standwiderlager (Fig. 166) ist als eine Stützmauer anzusehen, deren Krone bei *a* mit der Kämpferfuge zusammenfällt und die der Bogenschub *mittelbar* auf den Untergrund überträgt. Dagegen bildet das verlorene Widerlager (Fig. 167) eine ununterbrochene Fortsetzung des Gewölbes, so daß der Bogen sich mit seiner Kämpferfuge gleichsam *unmittelbar* auf den Boden setzt. Das Standwiderlager ist

die ältere, das verlorene Widerlager die neuere, von Frankreich[1] übernommene Bauart, die, wenn die gegebene Örtlichkeit ihre Anlage gestattet, sowohl konstruktiv als statisch der älteren überlegen ist. Bei Anwendung der verlorenen Widerlager kann die günstigste Bogenachse bis auf den Untergrund durchgeführt und dadurch das Eintreten größerer Biegungsspannungen vermieden werden. Diese Möglichkeit besteht beim Standwiderlager in geringerem Maße. Deshalb ist unter sonst gleichen Umständen die Sicherheit eines verlorenen Widerlagers mit weniger Aufwand an Mauerwerk zu erzielen, als bei der Anlage eines Standwiderlagers. In einem sachgemäß konstruierten Gewölbe mit verlorenem Widerlager gibt es auch keine *Bruchfuge*, und weil diese fehlt, braucht das Gewölbe keine sog. *Hintermauerung* (Zwickelausmauerung Z der Fig. 166). Das wird näher zu erläutern sein.

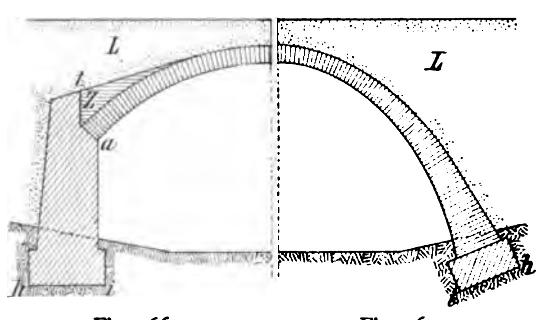


Fig. 166. Fig. 167.

In den Fig. 162—163 unter **46** wurde für *Kreis*bögen die Lage der Bruchfuge bereits dargestellt. Sie schließt danach mit der Richtung der Bogenkraft etwa einen Winkel von 30° ein. Bei Flachkreisbögen kommt sie nicht mehr zum Vorschein (Fig. 162 oben). Halbkreise sind (nach I. **65**, b) insofern die *ungünstigsten* aller Bogenachsen, als sie niemals Mittelkraftlinien sein können. Denn ihre Belastungshöhe q müßte sonst der Gleichung

$$q = \frac{q_0}{\cos^3 \varphi}$$

entsprechen, also q an den Kämpfern *unendlich* groß werden. Das ist aber konstruktiv nicht ausführbar. Selbst für einen Kreisbogen, dessen Zentriwinkel $2\varphi = 90^0$ ist, ergibt sich q nach obiger Bedingung noch etwa dreimal größer als die Belastungshöhe q_0 im Scheitel.

Somit ist bei *Kreis*gewölben eine Bruchfuge nicht zu vermeiden. Man muß deshalb konstruktive Mittel anwenden, damit der Gewölberand in der Nähe der Bruchfuge beim Eintreten ungünstiger Umstände nicht

[1] Daher stammt auch die Bezeichnung *culée perdue* (verlorenes Widerlager).

übermäßig gepreßt wird. Um dies zu verhüten, den Bogen übermäßig stark zu machen, wäre unsachgemäß. So *übermauert* man denn das Gewölbe an derjenigen Stelle, wo ein Öffnen der Bruchfuge erwartet werden könnte. Diese sog. *Hintermauerung* (Z in Fig. 168) wirkt einerseits durch ihr Gewicht günstig auf die Führung der Stützlinie, anderseits verhindert sie ein Öffnen der Bruchfuge im äußern Wölbrande, wodurch gleichzeitig auch *ein Heben* des Gewölbes an dieser Stelle erschwert wird.

Wie schon gesagt, fehlt beim gut angelegten verlorenen Widerlager im Gewölbe eine eigentliche Bruchfuge. Wenn daher bei einem solchen Widerlager Übermauerungen angewendet werden, so dienen diese entweder nur dazu, um an entsprechender Stelle auf die Führung der Bogenachse günstig zu wirken oder sie bezwecken die Herstellung einer geeigneten Abwässerung des Gewölberückens.

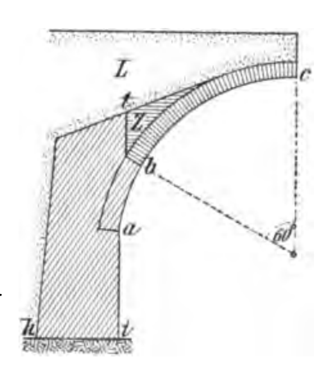


Fig. 168.

Schließlich ist noch zu bemerken, daß die *unterhalb* einer Bruchfuge liegenden Gewölbeschenkel mit zum Widerlager zu rechnen sind (Fig. 168). Man hat sich demnach den Teil bc des Bogens mit der Hintermauerung Z durch einen Schnitt bt vom Widerlager getrennt zu denken und bei der Berechnung die Lasten rechts vom Schnitte dem Gewölbe, links davon aber dem Widerlager zuzuweisen. Beim verlorenen Widerlager ist eine derartige Lastteilung unnötig.

b. Tätige und ruhende Bogenkraft beim Kanten von Widerlagern und Pfeilern.

1. Wenn der *Fugendruck* im Gewölbe, sowie namentlich auch der *Bodendruck* in der Sohle des Widerlagers (I. **12**) die zulässigen Grenzen an keiner Stelle, und bei keiner Lage der Belastung, überschreitet, so bedarf es aus Gründen der Sicherheit der Untersuchung auf Kanten des Widerlagers nicht mehr. Denn ein solches Kanten in der Kraftebene um einen Randpunkt h oder i der Widerlagersohle (Fig. 169—170) wäre nur dann zu befürchten, wenn gewisse Grenzlagen der Stützlinie sich einstellen, die sowohl Randpunkte des Bogens als auch der Widerlagersohle berühren und dort schon zerstörend wirken müssen (**46**, b), ehe das Kanten eintreten kann. Immerhin ist aber die Betrachtung der Grenzen des Gleichgewichtes im Augenblicke des Kantens in statischer Hinsicht belehrend. Deshalb sollen die beiden möglichen Fälle: *Kanten nach außen* und *Kanten nach innen*, die in den Fig. 169—170

für Standwiderlager dargestellt sind, besprochen werden. Verlorene Widerlager sind hinsichtlich der Möglichkeit des Kantens, wie leicht einzusehen, in einer weit günstigeren Lage als Standwiderlager.

2. Wirken keinerlei außergewöhnliche, wagerechte Kräfte gegen die Hinterwand des Widerlagers (wie in Fig. 170), so kann nur ein Kanten nach *außen* (um den Randpunkt *h*) eintreten (Fig. 169). Die Grenze des Gleichgewichtes wird erreicht, sobald sich für den Bogen im Zusammenhange mit dem Widerlager eine Mittelkraftlinie zeichnen läßt, die sowohl der größten als auch der kleinsten Bogenkraft entspricht,

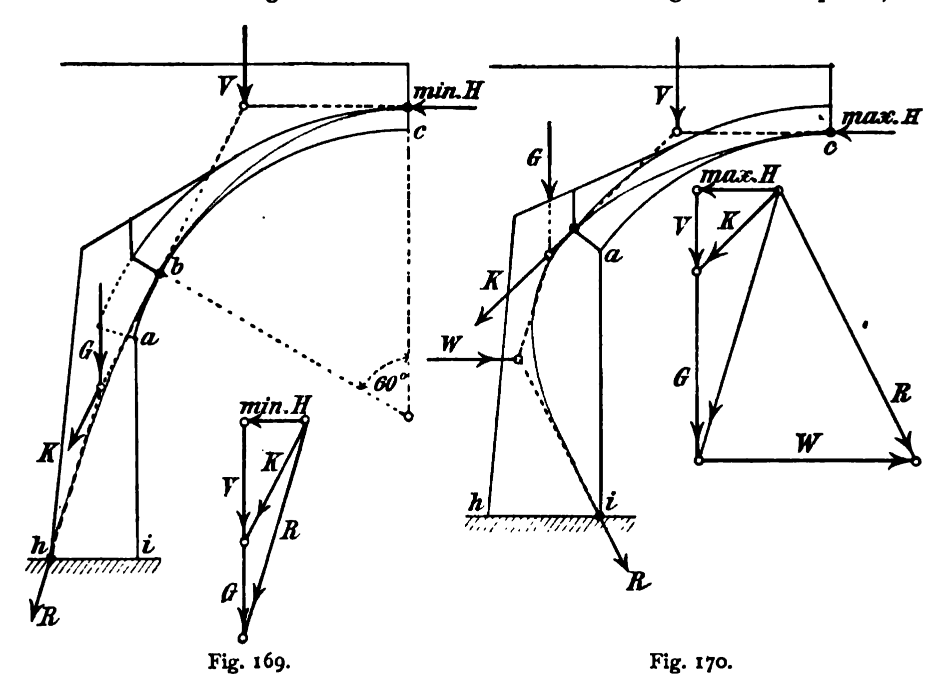


Fig. 169. Fig. 170.

die also (bei symmetrischer Anlage) die Randlinien in fünf Punkten berührt (**46**, b, 2). Dabei entsteht im Bogen (bis zur Bruchfuge bei *b*) die *Minimal-*, im Widerlager die *Maximal-*Stützlinie.

Wie in außergewöhnlichen Fällen eine auf die Hinterwand eines Standwiderlagers drückende wagerechte Kraft (von Erd- oder Wasserdruck, oder auch von einer benachbarten Bogenkraft herrührend) ein Kanten nach *innen* bewirken könnte, ist in der Fig. 170 dargestellt. Der Bogen wird dabei bis auf äußerste widerstehen, d. h. seine Stützlinie entspricht im Augenblicke des Kantens der größten Bogenkraft, während im Widerlager die Minimal-Stützlinie entsteht.

Die Seillinie der größten und kleinsten Bogenkraft ist in den Fig. 169—170 *rot* gezeichnet. Aus den zugehörigen beiden Kraftecken ist zu entnehmen, wie die Mittelkräfte des Bogens und Widerlagers sich zusammensetzen. Darin stellt V die auf den Bogen, G die auf das Widerlager fallende Belastung dar. R ist die Mittelkraft aller Lasten, die ihren Stützpunkt entweder in h oder in i findet. Das Erläuterte läßt sich in folgende Sätze fassen:

Die beim Widerlager auf das Kanten nach außen wirkende Bogenkraft heißt die tätige (aktive). Dem Kanten eines Widerlagers nach innen widersteht die ruhende Bogenkraft.

Die tätige Bogenkraft entspricht der Minimal-, die ruhende Bogenkraft der Maximal-Stützlinie des Gewölbes.

3. In den Fig. 171—173 ist *das Kanten eines Mittelpfeilers* untersucht worden. Zwei Kreisgewölbe von je 20 m Stützweite stoßen auf dem Pfeiler zusammen. Es fragt sich, ob bei einseitiger Verkehrsbelastung einer der Öffnungen ein Kanten um den gegenüber liegenden Randpunkt h des Pfeilerfußes eintreten kann. Zu dem Zwecke darf nach vorigem angenommen werden, daß das nur sein Eigengewicht tragende Gewölbe die größte ihm zu Gebote stehende (ruhende) Bogenkraft entfalten wird, um der tätigen Bogenkraft des Nachbargewölbes entgegen zu arbeiten. Danach ist in der Fig. 172 links die Maximal-, rechts dagegen die Minimal-Stützlinie (**46**, a) mit punktierten Linien gezeichnet. Aus den Kämpferkräften K_1 und K_2 fand sich in der Fig. 173 die Mittelkraft R', deren Richtung die lotrechte Pfeilerachse im Punkte n' (Fig. 172) trifft. In n' setzen sich R' und das gesamte Pfeilergewicht zur Mittelkraft R aller Kräfte zusammen. Diese fällt außerhalb des Pfeilerfußes und sogar nach der dem Punkte h gegenüber liegenden Pfeilerseite. Das bedeutet nichts anderes, als eine Beantwortung der gestellten Frage im verneinenden Sinne: *Ein Kanten um h ist ausgeschlossen.*

Man kann sich nun die Bogenkraft H_1 allmählich steigend und kleiner, die Bogenkraft H_2 in gleicher Zeit allmählich sinkend und größer werdend denken. Dann wird dabei, wie leicht einzusehen, der Angriffspunkt r' (Fig. 172) der Kraft R' nach links rücken, bis er schließlich nach r fällt, wenn, wie das in roten Linien dargestellt ist, die Mittelkraftlinie in jedem der beiden Gewölbe durch den Scheitel- und den Kämpferpunkt der Bogenachse verläuft. Aus dem rot gezeichneten Krafteck der Fig. 171 erkennt man ferner, wie dann auch die Mittelkraft R nach links rücken muß, d. h. wie die Gefahr des Kantens um h allmählich größer wird. Ein wirkliches Kanten um h ist aber aus-

geschlossen, weil sonst die Bogenkraft H_2 ihrem Maximum und H_1 ihrem Minimum zustreben müßte, was nach vorigem widersinnig wäre.

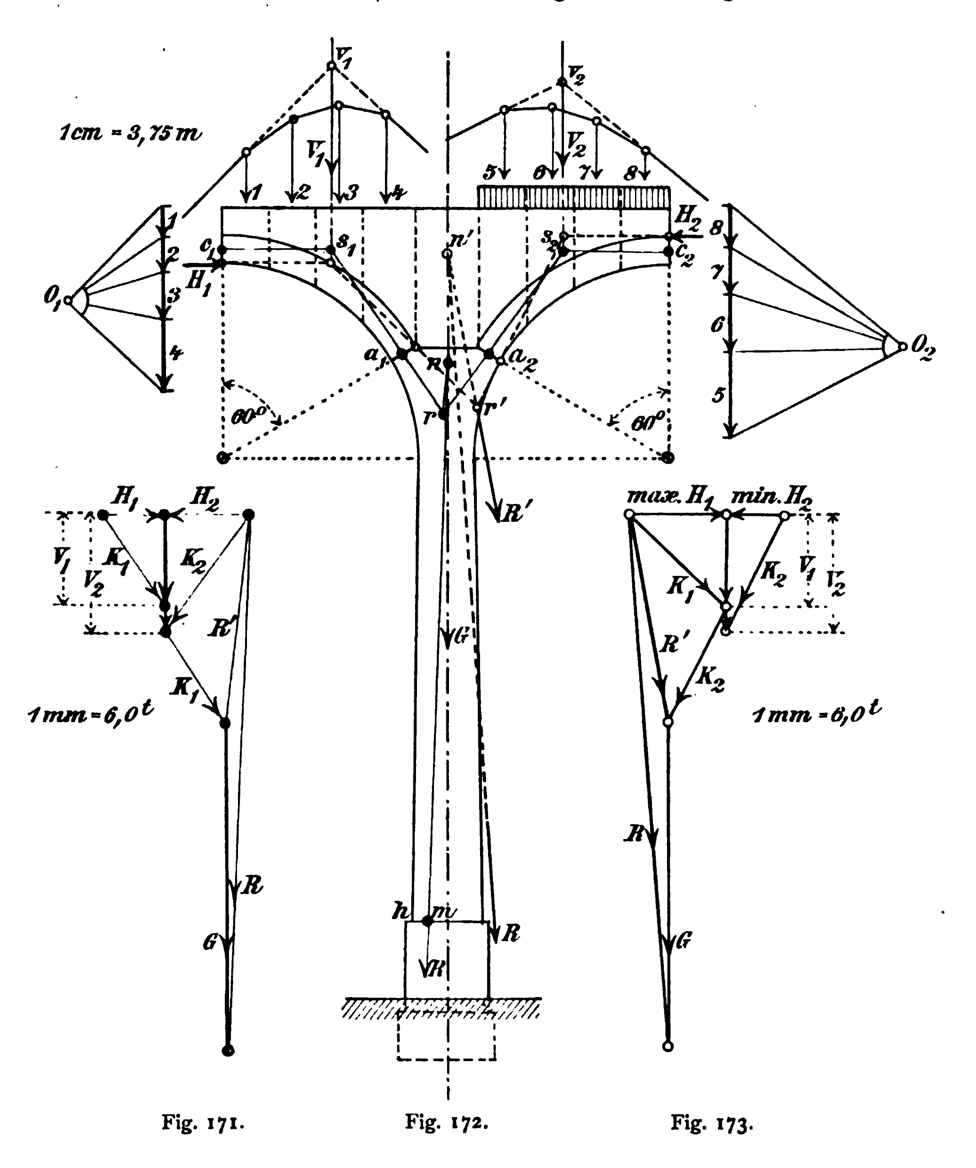


Fig. 171. Fig. 172. Fig. 173.

Das vorgeführte Beispiel läßt schließlich noch erkennen, daß es, wenn man statisch bestimmt vorgehen will, wohl begründet ist, *die größte Randspannung im Pfeilerfuße* aus der rot gezeichneten Mittel-

kraftlinie zu berechnen, wobei man diese in jedem Gewölbe, ebenso wie bei der Berechnung der Bogenstärke, durch die Scheitel- und Kämpferpunkte der Bogenachse legt. Im allgemeinen wird allerdings immer noch zu untersuchen bleiben, ob nicht etwa die Grenzwerte der Randspannungen bei Vollbelastung beider Öffnungen entstehen (vergl. das Beispiel unter **49**, b).

Im vorliegenden Falle berechnet sich das Gesamtgewicht des Pfeilers, bei 1 m Belastungshöhe der Verkehrslast und für 1 m Tiefe der Konstruktion mit

$$G = 2\left[23 \cdot 14 - \frac{10^2 \cdot \pi}{2} + \left(\frac{3 + 3{,}6}{2}\right) 24\right] = 488{,}4 \text{ t},$$

wenn das Gewicht der Kubikeinheit 2 t beträgt. Das gibt im Pfeilerfuße eine Druckspannung

$$\sigma = \frac{488400}{360 \cdot 100} = 14{,}5 \text{ kg/cm}^2.$$

Dagegen wirkt bei der gezeichneten *einseitigen* Belastung eine Längskraft P im Stützpunkte m, die (nach Fig. 172) mit

$$P = V_1 + V_2 + G = 488{,}4 - (13 \cdot 1)2 = 462{,}4 \text{ t}$$

anzuschreiben ist. Der Stützpunkt m liegt 95 cm vom Schwerpunkte. Daraus folgt

$$\sigma = \frac{M_k}{F \cdot k} = \frac{462400\left(95 + \frac{360}{6}\right)}{360 \cdot 100 \cdot \left(\frac{360}{6}\right)}$$

oder

$$\sigma = 33{,}2 \text{ kg/cm}^2 \text{ Druck},$$

wobei vorausgesetzt worden ist, daß die *Zug*zone elastisch widerstandsfähig ist.

48. Die Berechnung der Randspannungen. Hier kommen die *Fugen*spannungen in Gewölben, Widerlagern und Pfeilern, sowie der *Bodendruck* in den Gründungssohlen in Betracht.

a. Die Fugenspannungen.

1. *Als Rechnungsgrundlage* dient die für das größte, durch die Verkehrslast erzeugte Moment gezeichnete bekannte Mittelkraftlinie (**41** und **44**), die den Scheitel- und die Kämpferpunkte der Bogenachse trifft und dabei keine Kernlinie schneiden darf. Die Gründe, warum Verfasser hierbei von Tolkmitt abweicht, wurden (unter **44**, b) ausführlich dargelegt. Häufig kommt auch noch ein *drittes Verfahren* in

Anwendung. Dabei werden Scheitel- und Gewölbestärken vorläufig bestimmt (**45**) und dann wird eine Mittelkraftlinie durch den Scheitel der obern und die Kämpferpunkte der untern *Kernlinien* gelegt, also gleichsam eine *Minimalstützlinie zwischen den Kernlinien* gezeichnet. Die Benutzung einer solchen Linie ergibt aber wesentlich größere Bogenstärken als nach der Berechnung Tolkmitts und des Verfassers, obwohl hierbei die Stärken im allgemeinen schon etwas größer ausfallen als nach den Elastizitätsberechnungen. Verfasser glaubt daher, dem dritten Verfahren die innere Berechtigung absprechen zu müssen. Anders läge allerdings die Sache, wenn man eine *zwischen die Kernlinien gezeichnete* Minimalstützlinie — und unter Umständen auch eine solche Maximalstützlinie — als Grundlage für die Berechnung von Randspannungen oder Bodendrücken in Widerlagern und Pfeilern verwenden wollte. Näheres darüber weiterhin unter 3.

2. Der *Fugendruck* läßt sich (nach I. § 16) graphisch oder rechnerisch bestimmen, sobald der *Stützpunkt* der Fuge — d. i. ihr Schnittpunkt mit der Mittelkraftlinie — gegeben ist. Die Längskraft P findet sich aus dem Krafteck, mit dessen Hilfe die Mittelkraftlinie gezeichnet wurde. Hierzu sind auch die Nummern **36** und **37** des § 6 zu vergleichen. Danach findet man die Randspannungen allgemein entweder aus dem Kernmomente Gl. (67)

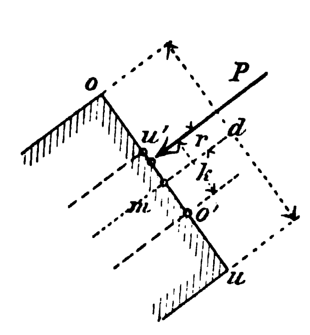


Fig. 174.

$$\sigma = \frac{M_k}{F \cdot k}$$

oder aus dem Schwerpunktsmomente

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{W}.$$

Auf den *rechteckigen Gewölbequerschnitt* (der Tiefe = 1) bezogen (Fig. 174) erhält man für $F = 1 \cdot d$, $k = \frac{1}{6} d$ und $W = 1 \cdot \frac{d^2}{6}$

$$\sigma = \frac{6 \cdot M_k}{d^2}$$

oder

$$\sigma = \frac{P}{d} + \frac{6M}{d^2}. \qquad (105)$$

Ist r der Abstand der Längskraft vom Schwerpunkte des Querschnittes, so ist

$$M_k = P\left(r + \frac{d}{6}\right)$$

und

$$M = P \cdot r. \qquad (106)$$

Bezeichnet man den *lotrechten* Abstand zwischen dem Schwerpunkt des Querschnittes und der Mittelkraftlinie mit v, so ist (nach Gl. 63)

$$M = H \cdot v. \qquad (107)$$

Fällt der Stützpunkt *außerhalb des Kernes* und ist dabei die *Zugzone* elastisch nicht widerstandsfähig (I. **129**), so erhält man die Druckspannung am Rande mit

$$\sigma = \frac{2P}{3z}, \qquad (108)$$

wenn z den Abstand des Stützpunktes vom Rande vorstellt (Fig. 175).

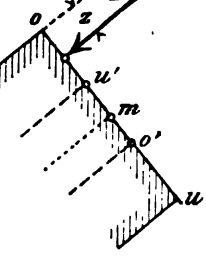


Fig. 175.

Die Herleitung dieser Formel findet sich unter I. S. 408.

3. *In Querschnitten von Widerlagern und Pfeilern* berechnet man die Randspannungen auch nach obigen Gl. (105), wobei die für das Gewölbe benutzte Mittelkraftlinie bis zur Erdbodenschicht durchzuführen ist. In jedem Falle ist aber außerdem noch zu überlegen, welche *Grenzlagen* der Mittelkraftlinie etwa noch in Betracht kommen können, um in jedem Querschnitte von den Kämpfern bis zur Gründungssohle eine Strecke einzugrenzen, in welcher *alle maßgebenden Stützpunkte* liegen. Nur auf solchem Wege ist es möglich, einerseits die Sohle von Widerlagern an die passendste Stelle des Untergrundes zu legen und anderseits das Widerlager im Innern konstruktiv so auszubauen, daß die strahlenförmig verlaufenden *Kraftbüschel* überall auf Baustoffe treffen, die einen der Größe der zugehörigen Kräfte entsprechenden Widerstand leisten. Das zweite Beispiel (unter **49**) wird das hier nur allgemein Angedeutete näher erläutern.

b. Der Bodendruck.

1. *Die Sicherheit eines Widerlagers oder Pfeilers*, und damit auch die Sicherheit des Gewölbes, hängt wesentlich von der Größe des eintretenden *Bodendruckes* ab. Denn die Spannungsgrenzen, innerhalb welcher der Erdboden, abgesehen von festem Stein- und Felsboden, noch als ausreichend tragfähig angesehen wird, betragen etwa nur 3—6 atm. Sie liegen also weit unterhalb derjenigen Grenzen, die für Baustoffe noch als zulässig gelten (I. **7** und **12**). Die Sicherheit der Konstruktion hängt deshalb in erster Linie von der ausreichenden

Tragfähigkeit des Untergrundes ab. In zweiter Linie stehen erst die Fugenspannungen im Innern von Gewölbe und Widerlager.

Weil nun eine *zug*feste Verbindung zwischen der Gründungssohle hi (Fig. 166—168) und dem Erdboden, auf welchen sie sich stützt, im allgemeinen nicht vorausgesetzt werden kann, so berechnet sich der Bodendruck immer nach der obigen Gl. (108). Graphisch erhält man seine Größe aus der *Einflußlinie einer Randspannung* (nach I. **111** und **129**).

2. Wegen der Wichtigkeit der sicheren Feststellung des größten Bodendruckes ist es bei seiner Berechnung zu überlegen, welche verschiedene Grenzlagen der Stützlinien in Betracht kommen müssen. Man könnte sagen, das wäre wohl am besten mit Hilfe der Elastizitätstheorie zu entscheiden. Das ist aber nicht der Fall. Denn hier handelt es sich um Verschiebungen der Mittelkraftlinien beim Eintreten ungewöhnlicher aber möglicher Ereignisse, wie sie als Folge mangelhafter Herstellung des Baues oder dergl. entstehen können, also um Möglichkeiten, die bei der Wahl des Sicherheitsgrades schon berücksichtigt sein müssen. Im Entwurfe kann man schädlichen Wirkungen solcher Zufälligkeiten dadurch vorzubeugen suchen, daß man unter den unendlich vielen *möglichen* Stützlinien diejenigen mit in Rechnung zieht, welche der kleinsten oder größten Bogenkraft entsprechen. Will man diese Linien nicht durch die bekannten Punkte der Gewölberänder führen (**46**, a), so erscheint es wohl zulässig, entweder die Randlinien mit den *Kern*linien zu vertauschen oder die Scheitel- und Kämpferpunkte der Grenzlagen nur soweit bis zum Gewölberande vorrücken zu lassen, bis dieser *eine der Druckfestigkeit des Steines* gleiche Spannung erfährt. Ist D die Druckfestigkeit und z der gesuchte Abstand zwischen Stützlinie und Gewölberand (Fig. 175), so berechnet sich

$$\sigma = D = \frac{2P}{3z}$$

oder

$$z = \frac{2P}{3D}. \tag{109}$$

Über Anwendung des Gesagten sind die Beispiele unter **49** und in § 10 zu vergleichen.

c. Temperatureinflüsse. Die Temperatur wirkt in gleicher Weise wie die Belastung: sie erzeugt Formänderungen und infolgedessen auch Spannungen (I. **8** und **36**). Unter der Voraussetzung einer unwandelbaren Lage der Kämpferfugen (**43**) wird der Bogenscheitel bei einer Wärme*zunahme* infolge seiner Verlängerung sich heben, umgekehrt bei Wärme*abnahme* sich senken. Die Stützlinie wird sich deshalb bei Erhöhung der Luftwärme im Scheitel senken und am Kämpfer heben.

Bei einer Abnahme tritt der umgekehrte Fall ein. Um die Einwirkungen der Temperatur möglichst unschädlich zu machen, wäre danach ratsam, die Gewölbe bei niedriger Luftwärme herzustellen und zu schließen. Denn wenn nach erfolgtem Schluß des Bogens das sog. *Lehrgerüst* (**43**, a), das bis dahin die Gewölbelast zu tragen hatte, beseitigt wird, beginnt der noch nicht völlig erhärtete Bogen, wie man sagt, sich zu setzen, d. h. zu verkürzen, und die Widerlager weichen elastisch aus, infolgedessen wird die Stützlinie, wie bei der Wärmeabnahme, im Scheitel sich heben und an den Kämpfern sinken.

Mit Hilfe der (unter **43**, b) abgeleiteten drei Grundbedingungen für die Lage der Mittelkraftlinie läßt sich die allein durch Temperatureinfluß hervorgerufene Bogenkraft H_t unter der Voraussetzung berechnen,

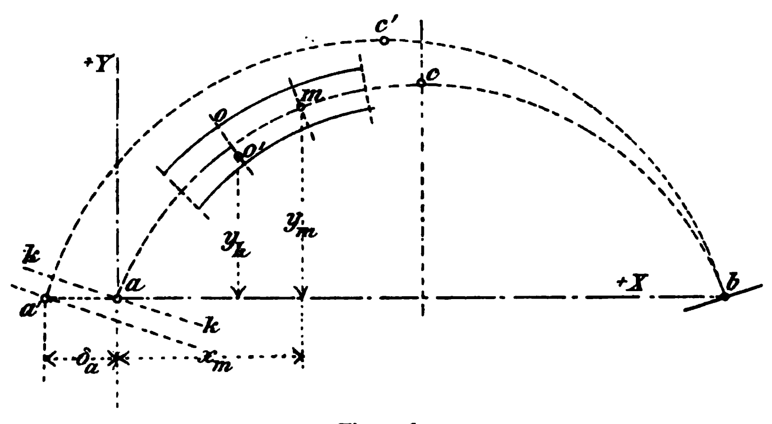


Fig. 176.

daß überall im (*gewichtlos* gedachten) Gewölbe ein gleicher Wärmegrad eingetreten ist. Ist nämlich der Bogen überall gleich warm oder kalt, so würde er, an einem Kämpfer freigemacht, nach erfolgter Formänderung seiner ursprünglichen Gestalt ähnlich bleiben, weil alle seine Abmessungen nach der Länge und Quere sich in gleichem Maße verändern. Also würde die Kämpferfuge kk des freigemachten Bogenendes bei a (Fig. 176) *parallel zu ihrer ursprünglichen Lage* sich um eine Strecke $\delta_a = \overline{aa'} = \int d\delta_x$ in der Richtung der X-Achse verschieben: bei Wärme nach außen, bei Kälte nach innen. Eine Drehung der Fuge könnte nicht stattfinden, demnach wäre $\int d\dot{\varphi}$ und deshalb auch $\int d\delta_y$ gleich Null zu setzen. An Stelle der drei Gl. (92) tritt demnach nur eine einzige, nämlich

$$\delta_a = \int d\delta_x = \int \frac{M_m}{EJ} y\, du = 0. \qquad (110)$$

Die durch die Temperatur allein hervorgebrachte Verschiebung $\int d\delta_x$ ist bekannt. Bezeichnet man sie mit δ_t, so ist

$$\delta_t = \pm \alpha t l$$

anzuschreiben, wenn α (nach I. **8**) die Temperaturdehnung für 1° Celsius, t die Zu- oder Abnahme der Wärme über eine mittlere Temperatur (+ 10° C.) und l die Bogenweite ist. Denn weil alle Bogenabmessungen eine gleiche Längenänderung erfahren, so muß die Änderung der Länge l das Maß der *von der Temperatur allein* herbeigeführten Verschiebung ergeben.

Die Gesamtverschiebung $\int d\delta_x$ wird aber auch noch von der infolge der Temperaturänderung hervorgerufenen Bogenkraft H_t beeinflußt. Je nachdem Wärme- oder Kälteeinfluß vorliegt, wirkt H_t positiv oder negativ, und je nachdem die Bogenkraft positiv oder negativ ist, verringert oder vergrößert sie die von der Belastung erzeugten Spannungen. Das von H_t erzeugte Moment M_m ist mit

$$M_m = \mp H_t \cdot y_m$$

anzuschreiben (Fig. 176).

Demnach erhält man für die Gesamtverschiebung des freien Bogenendes in der Richtung der X-Achse

$$\int d\delta_x = \pm H_t \int_0^l \frac{y_m^2}{EJ} du \mp \alpha t l = 0$$

und daraus

$$H_t = \frac{(\alpha t l) E}{\int_0^l \frac{y_m^2}{J} du}. \qquad (111)$$

Setzt man

$$du = \frac{dx}{\cos\varphi}$$

so gibt das

$$H_t = \frac{(\alpha t l) E}{\int_0^l \frac{y_m^2\, dx}{J \cos\varphi}}.$$

Bei einer Gewölbetiefe gleich der Einheit, und wenn die Projektion der Gewölbestärke auf die Lotrechte überall in bekannter Weise (**45**, a)

gleich der Scheitelstärke d_c bemessen wird, läßt sich das Trägheitsmoment mit

$$J = \frac{1}{12} \frac{d_c^3}{\cos^3 \varphi}$$

anschreiben. Dies eingesetzt gibt

$$H_t = \frac{(\alpha t l)\, d_c^3\, E}{12 \int_0^l y_m^2 \cos^2 \varphi \, dx} . \qquad (112)$$

In besondern Fällen kann das Integral des Nenners, falls es nicht unmittelbar zu lösen ist, durch Flächenberechnung, unter Anwendung der SIMPSONschen Regel erhalten werden. Ein Beispiel vergl. man unter **49**, c. Weitere Beispiele werden die Elastizitätsberechnungen des III. Bandes bringen.

Erfahrungsmäßig darf man für Steine und Beton

$$\alpha = 0{,}000010$$

annehmen, und bei einer mittlern Luftwärme von 10° C. für mitteleuropäische Verhältnisse

$$t = \pm 20^\circ \text{ bis } 30^\circ \text{ C.}$$

Das Dehnungsmaß E für Druck beträgt etwa

für *Ziegelgewölbe*	$E =$	30—50	t/qm
- *Bruchsteingewölbe*	$E =$	70—100	-
- *Stampfbetongewölbe*	$E =$	350—400	-

Hinsichtlich des Betons ist auch I. **122** zu vergleichen.

Die durch H_t allein verursachte Temperaturspannung, z. B. im obern Wölbrande irgend eines Querschnittes (Fig. 176) ist

$$\sigma_{ot} = \frac{H_t \cdot y_k}{F \cdot k} = \frac{6 \cdot H_t y_k}{d^2}, \qquad (113)$$

wenn y_k den Hebelarm der Bogenkraft in bezug auf den Kernpunkt o' des Querschnittes bedeutet (Fig. 176). Bei Wärmezunahme ist σ_{ot} ein Druck, bei Wärmeabnahme ein Zug.

49. Zahlenbeispiele.

a. Feststellen der Gestalt und Stärke des Bogens.

Aufgabe. Für den symmetrischen Hauptbogen einer steinernen Eisenbahnbrücke, die — wie die Fig. 177—180 veranschaulichen — *über eine Schlucht führt, soll die günstigste Bogenachse bei mittlerer Belastung gesucht werden.*

1. Gegeben sind Scheitel und Kämpferpunkte der innern Wölblinie und zwar die Lichtweite mit 24,0 m, der Pfeil mit 8,0 m. Die Belastungslinie (I. **65**, a) darf wagerecht angelegt werden. Der Bogen hat über obigem Scheitel eine Höhe von 2,0 m. Die an der Baustelle zu gewinnenden Wölbsteine haben ein Gewicht von 2 t/cbm und eine Druckfestigkeit von 300 atm. Danach kann die Verkehrslast (vgl. den Anhang § 11) zu 0,8 m Höhe angenommen werden.

Die Scheitelstärke des Bogens kann vorläufig unter Berücksichtigung folgender Umstände festgesetzt werden. Wie aus dem Anhange näher zu erkennen ist, hält die Bogenstärke bei ausgeführten Bauten im Vergleiche zur Bogenweite ziemlich enge Grenzen ein. Sie schwankt (wie auch unter **45**, b schon vermerkt wurde) je nach der Größe der Bogenweite und des Pfeilverhältnisses bei Eisenbahnbrücken zwischen $\frac{1}{20}$ und $\frac{1}{40}$ der Stützweite. Weil das vorgeschriebene Verhältnis $\frac{f_0}{l_0}$ mit $\frac{1}{3}$ ein mittleres ist, so erscheint es wohl angezeigt, für vorliegenden Fall etwa $d_c = \frac{1}{32} l_0$ zu wählen. Das wären 75 cm. Es ist aber von vornherein zu untersuchen, ob nicht etwa bei Annahme einer solchen Scheitelstärke die *zulässige Spannung* höher ausfällt, als die zu Gebote stehenden Bausteine vertragen. Man findet nach Gl. (103)

$$\sigma = \quad q_0\left[1 + \frac{l_0^2}{8f_0\left\{0{,}75 - 0{,}20\left(1 + \frac{f_0}{l_0}\right)\right\}}\right]$$

$$\sigma = 2 \cdot 2{,}8\left[1 + \frac{24 \cdot 24}{8 \cdot 8\left\{0{,}75 - 0{,}20\left(1 + \frac{8}{24}\right)\right\}}\right] = 110\,\text{t/m}^2 = \text{rund } 11\,\text{atm.}$$

Das gäbe also 25 fache Sicherheit. Selbst bei einer möglichen Verrückung der Bogenkraft bis zur obern Kernlinie würde die Sicherheit noch mindestens halbmal so groß sein.

Wollte man σ vorläufig nach der Gl. (104) berechnen, so gäbe das

$$\sigma = 0{,}6\,(24 + 4) = 16{,}8\ \text{atm}\,,$$

also bei etwa 18-facher Sicherheit

$$d_c = \frac{6 \cdot 24 \cdot 24}{8 \cdot 8\,(168 - 6)} + 0{,}20\left(1 + \tfrac{1}{3}\right) = 0{,}60\ \text{m.}$$

Das Pfeilverhältnis hätte sich in diesem Falle zu

$$\frac{24}{0{,}60} = 40$$

ergeben, was den praktisch bisher eingehaltenen äußersten Grenzen entspricht. Zweckmäßiger ist es deshalb, die Scheitelstärke, wie geschehen, etwas größer zu wählen.

Die Kämpferstärke d_a des Bogens wurde vorläufig auf etwa 1,30 m festgesetzt. Dies Maß entspricht ungefähr dem zweckmäßigen Verhältnis $d_a = \frac{d_c}{\cos\varphi}$. Außerdem gestattet es die Abrundung der Stützweite l auf 25,0 m und der Pfeilhöhe auf 8,1 m.

Um jetzt zuerst einen ungefähren Anhalt für die richtige Führung der Bogenachse zu erhalten, wurde die innere Wölbung als Parabel angenommen, wie dies in der linken Bogenhälfte der Fig. 177 punktiert angedeutet ist. Sodann wurde die von der *mittlern* Belastungslinie ee begrenzte Ansichtsfläche des Bogens zwischen den Lotrechten des Kämpfers und des Scheitels in neun lotrechte Streifen zerlegt, deren Schwerlinien 1 bis 9 eingezeichnet und in ihrer Länge gemessen. Das gab die Unterlagen zur Darstellung des *ersten* Krafteckes (O_1), mit dessen Hilfe die Schwerlinie der Bogenfläche, die durch s_1 verläuft, festgestellt worden ist. Vgl. das zugehörige Seileck S_1 oben in Fig. 177. Damit wäre der Punkt s_1' gefunden, in welchem Kämpferkraft und Bogenkraft angreifen, deren Größen darauf in dem mit dem Pole O_1' gezeichneten Kraftecke abgegriffen werden konnten. Es ergab sich (durch Abgreifen):

$$H_1 = 80 \text{ t}$$
$$K_1 = 154 \text{ t.}$$

Danach berechnet sich die Druckspannung (vorläufig)

$$\text{im Scheitel mit } \frac{80000}{75 \cdot 100} = 10{,}7 \text{ atm}$$
$$\text{am Kämpfer - } \frac{154000}{130 \cdot 100} = 11{,}8 \text{ atm.}$$

Die mit Hilfe des Poles O_1' punktiert gezeichnete Mittelkraftlinie $m'm'$ fällt in der Bogenmitte zu hoch. Deshalb ist versuchsweise eine neue innere Wölblinie angenommen worden, die ungefähr die Mitte zwischen der Parabel und der $m'm'$ hält. Eingezeichnet ist die Versuchslinie nicht, um die Fig. 177 nicht zu sehr zu überlasten, aber das zugehörige *zweite* Krafteck (mit den Polen O_2 und O_2') ist gezeichnet und ebenfalls die damit erhaltene zweite Mittelkraftlinie $m''m''$, die schon ziemlich genau mit der günstigsten Bogenachse zusammen geht. Dafür ergab sich:

$$H_2 = 73{,}5 \text{ t und } \sigma = \frac{73{,}5}{7{,}5} = 9{,}8 \text{ atm}$$
$$K_2 = 144{,}0 \text{ t und } \sigma = \frac{144}{13} = 11{,}1 \text{ atm.}$$

Schließlich wurde auf der rechten Bogenhälfte die innere Wölblinie endgültig festgelegt. Sie ist ein Korbbogen, wie dargestellt, mit drei

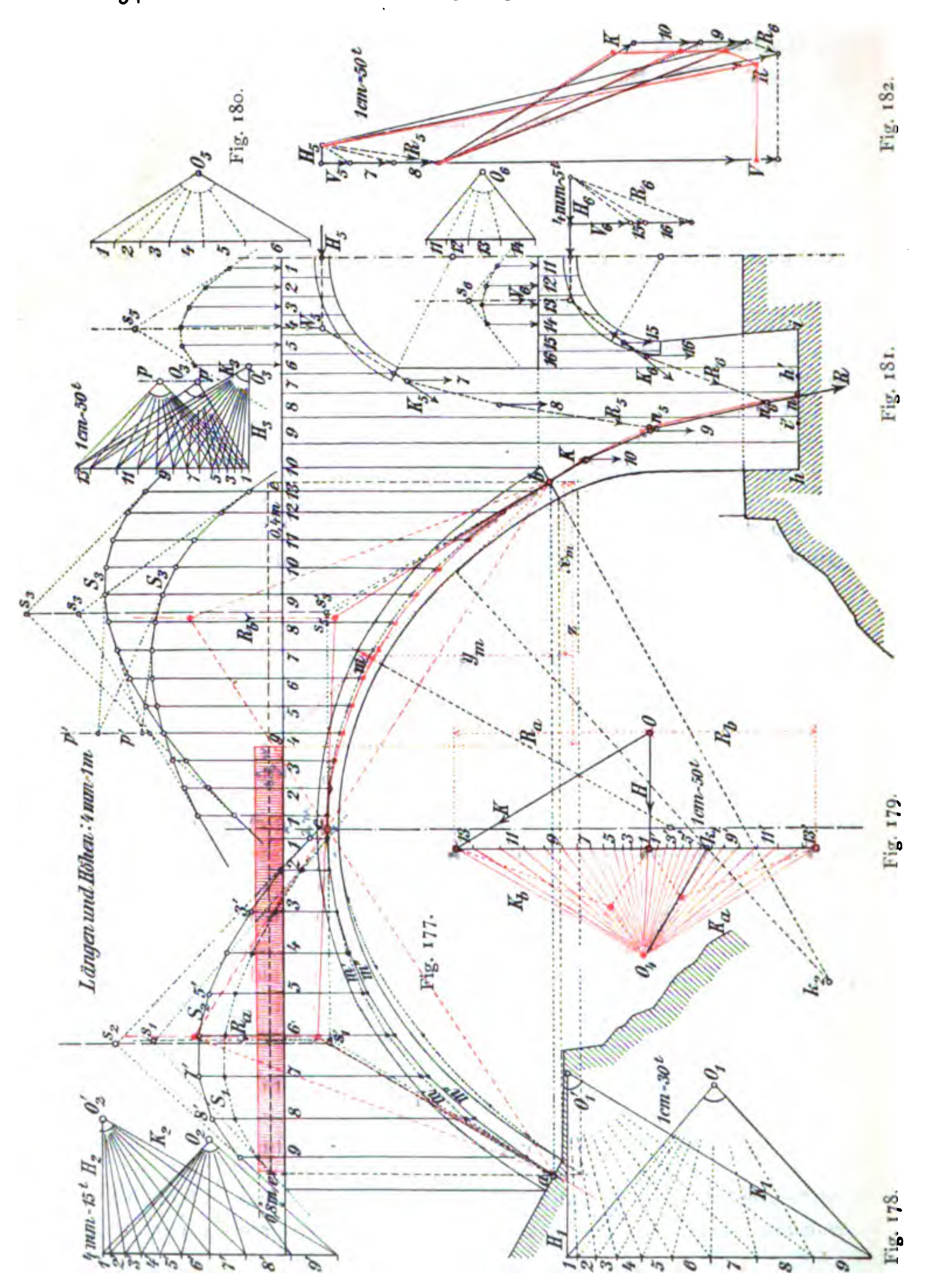


Fig. 177. Fig. 178. Fig. 179. Fig. 180. Fig. 181. Fig. 182.

verschiedenen Halbmessern gezeichnet. Zur Nachprüfung wurde dann noch ein *letztes* Krafteck (mit den Polen O_3 und O'_3) gezeichnet und dafür die Ansichtsfläche des Bogens in 13 Streifen geteilt, so daß diese mit Ausnahme von 13 genau 1 m breit sind. Die Schwerlinie $s_8 s'_3$ (für mittlere Belastung wurde zweimal bestimmt, wobei die beiden Pole O_3 in der Geraden pp lotrecht untereinander liegen, so daß das Schneiden der zusammengehörigen Seileckseiten auf der lotrechten Polarachse $p'p'$ nachgeprüft werden konnte (I. **57**, a).

Die Bogenachse (als Seileck dargestellt) erwies sich danach als ausreichend genau überall in der Mitte des Bogens liegend. Für sie ergibt sich:

$$H_3 = 73 \text{ t}$$

und

$$K = 146 \text{ t},$$

also Werte, die von den mit Hilfe des Kraftecks O_2 berechneten fast gar nicht mehr abweichen.

2. Es folgt jetzt die *Darstellung der Mittelkraftlinie für die ungünstigste einseitige Vollbelastung*, um zu sehen, ob diese im gefährlichsten Querschnitte m etwa außerhalb des Kernes zu liegen kommt und wie groß, wenn dies der Fall ist, dort die *größte Zugspannung* wird. Die hier zugehörigen Linien sind rot gezeichnet.

Der gefährlichste Querschnitt wurde *in der Mitte eines Bogenschenkels* (bei m) angenommen (nach **41**, b), die zugehörige gefährlichste Lastlage erhält man durch Festlegen der Lastscheide. Dazu war es nur nötig, den Schnittpunkt g der Geraden bm und ac aufzusuchen. Bis dahin wird die Volllast vom Kämpfer a aus gerechnet reichen müssen.

Um das rot dargestellte Krafteck mit dem Pole O_4 (Fig. 178) genau zu erhalten, wurden die Schwerlinien der Mittelkräfte R_a und R_b der linken und rechten Bogenhälfte rechnerisch festgelegt, wozu die Zahlenwerte aus den vorherigen Berechnungen zu Gebote standen. Für die *mittlere* Belastung war gefunden worden:

Schwerpunktsabstand von der betreffenden Kämpferlotrechten ab gerechnet . . . . = 4,7 m.

Daraus folgen die beiden neugesuchten Schwerpunktsabstände rechts und links

$$x_{0r} = \frac{63{,}45 \cdot 4{,}7 - 9{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot \left(\frac{9{,}5}{2}\right) + 3 \cdot 0{,}4\,(12{,}5 - 1{,}5)}{60{,}85} = 4{,}82 \text{ m}$$

$$x_{0l} = \frac{63{,}45 \cdot 4{,}7 + 12{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot \left(\frac{12{,}5}{2}\right)}{68{,}45} = 4{,}81 \text{ m}.$$

Das Krafteck O_4 konnte danach in bekannter Weise (I. **59**) gezeichnet werden. Die mit seiner Hilfe in der rechten Bogenhälfte gezeichnete Mittelkraftlinie bleibt im gefährlichsten Querschnitte bei *m innerhalb des Kernes*, soweit dies in der Fig. 177 bei dem kleinen Maßstabe ihrer Darstellung überhaupt noch erkannt werden kann. Es empfiehlt sich, die Lage der roten Mittelkraftlinie *rechnerisch nachzuprüfen*, um nötigenfalls noch Änderungen in den bisherigen Bogenstärken vorzunehmen.

Es ist (von b aus gemessen)

$$x_m = 6{,}25 \text{ m}$$

gemacht worden. Aus der Fig. 177 abgegriffen wurde

$$y_m = 6{,}65 \text{ m.}$$

Nach erfolgter Festlegung der Gestalt des Korbbogens könnte y_m bei gegebenen Krümmungshalbmessern der innern Wölblinie auch berechnet werden. Dabei ist die Stützweite = 25 m und der Pfeil = 8,1 m einzusetzen.

Nach der Gl. (82) erhält man danach den Abstand z der Lastscheide aus

$$\frac{z}{l - z} = \frac{2 \cdot xf}{yl}$$

mit

$$z = 9{,}5 \text{ m.}$$

Damit sind die Unterlagen zur Berechnung der *Einflußfläche* F_e des Momentes M_m gegeben. Man erhält nach Gl. (83)

$$F_e = 6{,}25\left[9{,}5 - \left(\frac{25 + 6{,}25}{2}\right) + \frac{(25 - 9{,}5)\,12{,}5}{2 \cdot 9{,}5}\right] = 25{,}62 \text{ m}^2.$$

Weil für die *mittlere* Belastung das Moment überall gleich Null ist, so braucht die Einflußfläche nur noch mit $\pm \frac{q}{2}$ links, und $\mp \frac{q}{2}$ rechts belastet zu werden. Das gibt dann

$$\pm M_m = 25{,}62 \cdot 0{,}4 \cdot 2 \cdot 100 = 2050 \text{ cm t.}$$

Um den Abstand der Längskraft P_m vom Schwerpunkte m feststellen zu können, ist es nötig P selbst zu berechnen. Das könnte nach der Gl. (66) geschehen. Wir beschränken uns hier aber darauf, die Größe von P_m aus dem Kraftecke O_4 abzugreifen. Dazu wurde auf die Verlängerung der Fuge m von O_4 aus eine Senkrechte $O_4 k_1$ gefällt. Deren Endpunkt fiel *zufällig* mit dem Krümmungsmittel k_1 zusammen. Das gab

$$\overline{O_4 k_1} = P_m = 91{,}0 \text{ t.}$$

Für den Abstand v der Längskraft erhält man danach

$$v = \frac{M_m}{P_m} = 22{,}5 \text{ cm.}$$

Die Bogenstärke d_m ist in m vorläufig auf 108 cm bemessen worden. Der Stützpunkt von P_m fällt also stark außerhalb des Kernes, so daß je nach der Lage der Verkehrslast sowohl am obern als auch am untern Rande *Zug*spannungen zu erwarten sind. Die positive Randspannung σ_u berechnet sich aus

$$\sigma_u = \frac{M_k}{F \cdot k} = \frac{P_m\left(v - \frac{d_m}{6}\right)}{F \cdot \frac{d_m}{6}} = \frac{6 \cdot 91000\left(22,5 - \frac{1}{6} \cdot 108\right)}{108 \cdot 100 \cdot 108} = 2,05 \text{ atm.}$$

Sollte das in einem besonderen Falle nicht für zulässig erachtet werden, so müßten die Gewölbestärken entsprechend vergrößert werden usw. Die negative Randspannung σ_o beträgt

$$\sigma_o = \frac{6 \cdot 91000\left(22,5 + \frac{1}{6} \cdot 108\right)}{108 \cdot 100 \cdot 108} = 19 \text{ atm.}$$

Im Querschnitte m wäre danach, bei einer vorausgesetzten Druckfestigkeit der Wölbsteine von 300 atm, die Sicherheit etwa eine 15fache. Mindestens ebenso hoch wird sie im Scheitel und an den Kämpfern sein, falls die Mittelkraftlinie dort die nach der Elastizitätstheorie zu erwartenden Lagen annimmt.

b. Berechnung von Fugen- und Bodendrücken. Das Hauptgewölbe der vorigen Aufgabe stützt sich auf ein Widerlager, das sich an die Felsenwand der Schlucht lehnt und dessen Wand mit zwei übereinander liegenden kleinern Kreisgewölben (von 8 m und 6 m Lichtweite bei überall gleicher Stärke von 50 cm) durchbrochen ist.

Aufgabe. Es sind zu berechnen: 1) *Scheitel- und Kämpferdrücke, die in den beiden kleinern Gewölben aus dem Eigengewichte entstehen.* 2) *Der Bodendruck in der Widerlagssohle hi, wobei die Einflüsse der Mittelkraftlinien der kleinern Gewölbe zu berücksichtigen sind.*

1. Die Kraftecke O_5 und O_6 haben zum Festlegen der Schwerlinie der Mittelkräfte V_5 und V_6 der Gewölbelasten gedient, so daß für beide kleinern Gewölbe die Richtungen und dadurch auch die Größe von Bogenkraft und Kämpferkraft aufgetragen werden konnten. Durch *Abgreifen* wurde erhalten:

$$V_5 = 20,4 \text{ t}; \quad V_6 = 11,0 \text{ t}.$$

Daraus:

$$H_5 = 13,0 \text{ t}; \quad K_5 = 24,0 \text{ t}$$
$$H_6 = 8,5 \text{ t}; \quad K_6 = 13,5 \text{ t}.$$

Die gesuchten Fugendrücke sind danach

	im Scheitel	am Kämpfer
oben	$\frac{13000}{5000} = 2,6$ atm;	$\frac{24000}{5000} = 4,8$ atm
unten	$\frac{8500}{5000} = 1,7$ atm;	$\frac{13500}{5000} = 2,7$ atm.

Dazu kämen noch die Fugendrücke aus der Verkehrslast, die aber unberücksichtigt bleiben sollen.

2. R sei die Mittelkraft aus den Einflüssen des Hauptgewölbes und der beiden Nebengewölbe. Dann wird R in der Sohle hi am ungünstigsten zu liegen kommen, wenn der Einfluß der Nebengewölbe so klein wie möglich ist. Deshalb wäre es wohl zulässig, hier in den kleinen Gewölben *Minimal*-Stützlinien *zwischen den Kernlinien* zu zeichnen, unter der Voraussetzung, daß eine noch *höhere* Lage von H_5 und H_6 als höchst unwahrscheinlich außer Betracht bleiben muß. Täte man dies, so müßte der Stützpunkt n der Mittelkraft R etwas mehr nach rechts fallen, als es geschieht, wenn die Stützlinien in den Nebengewölben durch die Scheitel- und Kämpferpunkte ihrer Bogen*achse* gelegt werden, wie das in den Fig. 179—180 geschehen ist. Wie gesagt, eine solche Einführung der *Minimal*-Stützlinie böte im allgemeinen eine etwas größere Sicherheit. Verfasser ist aber nach seinen Erfahrungen der Ansicht, daß man aus Gründen der Sicherheit der Minimal-Stützlinien nicht bedarf. Deshalb sind in den Fig. 179—180 die Angriffspunkte von Bogenkraft und Kämpferkraft in die Bogenachse gelegt.

Welche Mittelkraftlinie im Widerlager des Hauptbogens die ungünstigste für den Bodendruck sein wird, läßt sich im allgemeinen nicht entscheiden. Das muß ausprobiert werden. Jedenfalls ist dabei zu untersuchen, wie groß der Bodendruck ausfällt, wenn das Hauptgewölbe *voll* belastet ist und die Strecken des Widerlagers und der Nebengewölbe nur Eigengewicht zu tragen haben. Andere Möglichkeiten sollen weiterhin besprochen werden.

Bei Vollbelastung des Hauptgewölbes ergibt sich Bogenkraft und Kämpferkraft aus Größe und Angriffspunkt der Mittelkraft R_a des roten Kraftecks O_4. Die Kämpferkraft K ist mit

$$K = 164 \text{ t}$$

abgegriffen und ihre Richtung in b angetragen worden. Widerlager und Nebengewölbe wurden in die Streifen 1 bis 10 und 11 bis 16 eingeteilt. In welcher *Reihenfolge* die Streifengewichte mit K, K_5 und K_6 zusammengesetzt werden, ist (nach I. **54**, a) gleichgültig. Es wurden in dem Kraftecke der Fig. 182 zusammengesetzt:

K mit den Streifengewichten 10 und 9
K_5 - - - 7 - 8
K_6 - - - 15 - 16.

Die mit Hilfe des Kraftecks der Fig. 180 gezeichnete Mittelkraftlinie *an* des Hauptbogens trifft in n_5 die Mittelkraft R_5 des obern, in n_6 diejenige des untern Nebengewölbes, so daß die Mittelkraft R aller Kräfte schließlich die Sohle *hi* im Stützpunkte n schneidet.

Die Sohle ist 510,0 cm breit. Ihre Kernweite (I. **112**) ist also 85 cm. Der Abstand zwischen n und dem Kernpunkte i' mißt fast genau 100 cm. Die lotrechte Seitenkraft von R ist aus dem Kraftecke der Fig. 182 mit

$$V = V_5 + V_6 + (7 + 8 + 9 + 10 + 15 + 16) = 330 \text{ t}.$$

Die *Randspannung* in der Sohlenkante i ist also

$$\sigma_i = \frac{330000 \cdot 100}{510 \cdot 100 \cdot 85} = 7{,}6 \text{ atm}.$$

Einen solchen Druck kann der *Fels*boden mit Sicherheit tragen.

Ob nun bei irgend einer *einseitigen* Vollbelastung des Hauptbogens der Stützpunkt n noch weiter nach rechts fallen und dabei σ_i größer als der vorberechnete Wert werden kann, wäre zu untersuchen. Dazu eignet sich die rot gezeichnete Stellung der Last, für welche alle wichtigen Kraftgrößen bereits bestimmt worden sind. Wie die roten Linien im Krafteck der Fig. 178 in Verbindung mit der zugehörigen rot gezeichneten Mittelkraftlinie im Widerlager dartun, rückt allerdings der rote Stützpunkt ein klein wenig über n hinaus. Dafür aber fällt die lotrechte Seitenkraft V der roten Mittelkraft R viel kleiner aus als vorher, so daß eine Erhöhung der berechneten Randspannung σ_i nicht eintritt, wovon man sich durch Rechnung überzeugen kann.

c. Berechnung von Temperaturspannungen.

Aufgabe. Ein Betonbogen ist bei einer Luftwärme von $+ 10^0$ *C. geschlossen worden und zeigt nach erfolgter Beseitigung des Lehrgerüstes eine Parabelachse von* 32 m *Weite und* 4 m *Pfeil. Seine Stärken sind im Scheitel* 1,00 m *und an den Kämpfern* $\frac{1{,}00}{\cos \varphi}$ m. *Der Bogen erwärmt sich gleichmäßig um* 24^0 *C. Die dadurch entstehenden größten Randspannungen sind zu berechnen.*

Die durch die Temperaturerhöhung hervorgerufene Bogenkraft H_t beträgt nach der Gl. (111)

$$H_t = \frac{\alpha t l E}{\int_0^l \frac{y^2 dx}{J \cos \varphi}}.$$

Darin ist für 1 m Bogentiefe zu setzen:

$$J = \frac{1}{12} \cdot 1{,}00 \left(\frac{1{,}00}{\cos\varphi}\right)^3.$$

Das gibt
$$H_t = \frac{\alpha t l E}{12 \int_0^l y^2 \cos^2\varphi \, dx}. \tag{114}$$

Es kommt jetzt darauf an, das bestimmte Integral integrierbar zu machen. Bestimmen wir deshalb $y \cos\varphi$ als Funktion von x. φ ist der Winkel, den ein Krümmungshalbmesser ϱ im beliebigen Punkte m mit der Y-Achse einschließt. Schneiden die Richtungen von ϱ und einer durch m gelegten Wagerechten die Scheitellotrechte in den Punkten r und s, so ist bekanntlich die Strecke rs (Fig. 183) für jeden Punkt m unveränderlich, sie ist gleich dem *Parameter* p der Parabel. Es ist also

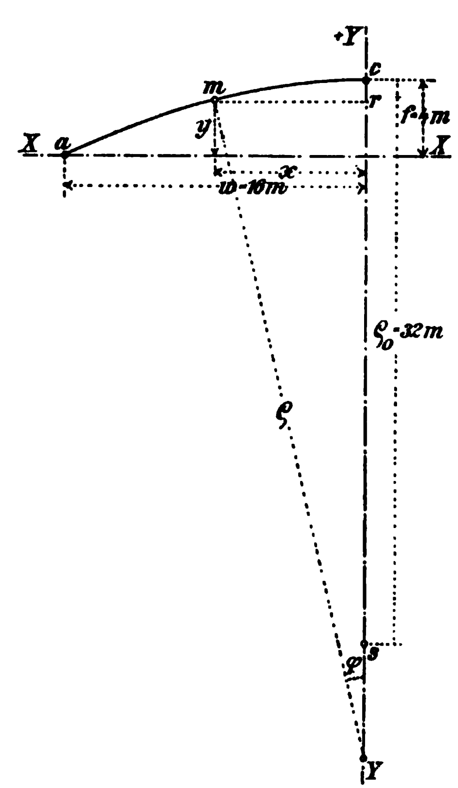


Fig. 183.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{l}{2} - x}{p} = \frac{dy}{dx}.$$

Aus der Parabelgleichung

$$y = \frac{4f}{l^2} x (l - x)$$

folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2}(l - 2x),$$

also

$$p = \frac{l^2}{8f} = \varrho_0,$$

dem Krümmungshalbmesser im Scheitel.

Ferner ist
$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}.$$

Dies alles eingesetzt gibt:

$$H_t = \frac{\alpha t l E}{12 \int_0^l \frac{x^2 (l - x)^2 dx}{4p^2 + (l - 2x)^2}}.$$

Bezieht man das Nenner-Integral auf die Scheitellotrechte als Y-Achse, so geht

$$x \text{ in } (w - x)$$

über, wenn $\frac{l}{2} = w$ gesetzt wird. Das gibt dann *zweimal* das Integral innerhalb der Grenzen 0 und w, oder

$$H_t = \frac{\alpha \cdot t \cdot l \cdot E}{6 \int_0^w \frac{(w^2 - x^2)^2}{(p^2 + x^2)} dx}.$$

Quadriert man im Nenner aus und dividiert Zähler durch Nenner, so erhält man schließlich

$$H_t = \frac{\alpha t l \cdot E}{\mathfrak{N}}$$

$$\mathfrak{N} = 6(w^2 + p^2)^2 \int_0^w \frac{dx}{x^2 + p^2} + 6 \int_0^w x^2 dx - 6(2w^2 + p^2) \int_0^w dx.$$

Setzt man in obige Gleichung jetzt

$$\alpha = 0{,}000010; \quad t = 24^0$$

$$l = 32 \text{ m}; \quad f = 4 \text{ m}; \quad E = 4000000 \frac{t}{m^2}$$

$$p = \frac{l^2}{8f} = \frac{32^2}{8 \cdot 4} = 32{,}0 \text{ m}$$

$$\mathfrak{N} = 6(w^2 + p^2)^2 \frac{1}{p} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{w}{p}^{*)} + 6 \frac{w^3}{3} - 6(2w^2 + p^2) w = 13584,$$

so erhält man

$$H_t = \frac{0{,}00001 \cdot 24 \cdot 32 \cdot 4000000}{13584} = 2{,}26 \text{ t}.$$

Daraus folgen (für das *gewichtlos* gedachte Gewölbe) die größten Temperaturspannungen σ_t im Scheitel mit

$$\sigma_{t_o} = \frac{+ H_t\left(f - \frac{100}{6}\right)}{100 \cdot 100 \cdot \frac{100}{6}} = + 5{,}24 \text{ atm}$$

und

$$\sigma_{t_u} = \frac{- H_t\left(f + \frac{100}{6}\right)}{100 \cdot 100 \cdot \frac{100}{6}} = - 5{,}67 \text{ atm}.$$

*) $\operatorname{arc\,tg} \frac{w}{p} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\right].$

Weil unter normalen Verhältnissen die aus der *Belastung* herrührende Bogenkraft *ober*halb der Bogenachse angreift, so folgt, daß infolge der Erwärmung des Gewölbes die Mittelkraftlinie im Scheitel *sinkt*, denn am obern Rande sind die Temperaturspannungen positiv, am untern Rande dagegen negativ. Weiter folgt, daß es zweckmäßig sein würde, das Gewölbe möglichst *bei niedriger Luftwärme zu schließen*, weil dann bei Temperaturänderungen im Scheitel *mehr ein Sinken* als ein Heben der Mittelkraftlinie, also mehr eine Verminderung als eine Vermehrung der Randspannungen zu erwarten wäre.

Berechnungen von Temperaturspannungen, bei denen das Nenner-Integral auf graphischem Wege (mit Hilfe der SIMPSONschen Regel) dargestellt wird, sind im III. Bande zu vergleichen.

50. Geschichtliche Rückblicke.

a. Die älteren Theorien bis auf COULOMB, PONCELET und GERSTNER.

1. Soweit wie es die Schriften der Griechen und Römer und die erhaltenen Denkmäler ihrer einstigen hohen Kultur erkennen lassen, besaßen die Alten keine Theorie des Gewölbebaues, sie bauten allein nach Erfahrungsregeln.

Die Römer benutzten nur den Halbkreisbogen, die theoretisch ungünstige Gestalt eines Bogens, der Flachbogen scheint ihnen unbekannt geblieben zu sein. Schon aus diesem Grunde verboten sich bei ihnen bedeutende Bogenweiten von selbst. In der Regel baute man in römischen Zeiten keine Gewölbe über 25 m bis 30 m Weite.

Die geistigen Urheber der ältesten steinernen Brücken des Mittelalters waren die Mönchsorden, namentlich Benediktiner und Cisterzienser. Ihnen verdankt man wahrscheinlich auch die Einführung des Flachbogens. Ob die Baumeister der Gotik bereits eine richtige Anschauung über das Spiel der Kräfte im belasteten Bogen besessen haben, ist mit Bestimmtheit nicht zu sagen. Um die Mitte des 15. Jahrhunderts standen zwar schon das Straßburger Münster, der Kölner Dom und die Wiener Stephanskirche, aber die damalige Ingenieurkunst lag nachweislich noch völlig im Banne der römischen Baukunst und das einzigste Werk, das, wenn auch dunkel und lückenhaft, Auskunft über technische Einzelheiten der römischen Bauten gibt, VITRUVS: De Architectura, beeinflußte damals, und auch noch Jahrhunderte später, die Anschauungen der technischen Welt.

Die ersten Gewölbetheorien stammen aus Frankreich, dessen theoretisch und praktisch frühreife Ingenieure im Bau von Gewölben bis heute nachahmungswerte und *unübertroffene* Meister geblieben sind.

PHILIPPE DE LA HIRE (1640—1718) veröffentlichte die erste Theorie der Kreisbogengewölbe[1]. Er betrachtet nur *das Gleiten* der Wölbsteine aufeinander und findet, daß der Bruch des Gewölbes immer in der Mitte zwischen Scheitel und Kämpfer stattfinden müsse, ferner daß der obere Gewölbeteil als *ein Keil* anzusehen sei, der bestrebt ist, zwischen den beiden Gleitflächen des Scheitels und der Bruchfuge herabzusinken. BELIDOR (1697—1761)[2] wahrte im wesentlichen den von LA HIRE eingenommenen Standpunkt. Auch EYTELWEIN (1764—1848), der große deutsche Ingenieur und erster Direktor der 1799 gegründeten Berliner Bauakademie, beachtet in seiner Statik der Gewölbe nur die Gefahr des Gleitens[3]. Heute findet die damals herrschende Meinung, wonach der Einsturz eines Gewölbes in erster Linie infolge des Gleitens der Wölbsteine aufeinander herbeigeführt wird, keine Anhänger mehr. Denn aus zahlreichen Versuchen über das Gleiten von Steinen ist unzweifelhaft festgestellt worden, daß selbst bei völlig mörtellosen glatten Fugen der Reibungswinkel φ zwischen Stein und Stein ziemlich groß ist. Gewöhnlich wird für Stein auf Stein $\varphi = 33^\circ$, beim Vorhandensein einer Mörtelschicht $\varphi = 26^\circ$ angenommen. Wählt man also die Fugenrichtungen bei günstiger Bogenachse nur einigermaßen zweckmäßig, so wird der Winkel, den die Mittelkraft mit der Längskraft einer Fuge einschließt, niemals auch nur annähernd obige Größe erreichen. Die Gleitgefahr darf daher in der Regel ganz außer Betracht gelassen werden.

Der Erste, der außer dem Gleiten auch das *Kanten* der Steine beim Gewölbeeinsturz untersuchte, war COUPLET[4], weil er aber, wie LAHIRE und BELIDOR den Bruch in der Mitte eines Gewölbeschenkels annahm, so kam er zu unrichtigen Ergebnissen. Bald darauf (1732) stellte DANISY[5] in Montpellier Versuche über den Bruch der Gewölbe an, wobei sich ergab, daß der Einsturz nicht durch Gleiten, sondern durch Kanten erfolgte. BOISTARD[6] wiederholte diese Versuche und wies nach, daß der Bruch immer durch Drehen um die Kanten der zerbrochenen Teile, nie aber durch Gleiten in den Fugen erfolgte. Dabei beobachtete er

---

[1] Mémoires de l'académie des sciences. 1712.

[2] La science des ingénieurs. 1729. In der zweiten, 1830 von NAVIER besorgten Ausgabe findet man bemerkenswerte Anmerkungen von diesem über die Theorie der Gewölbe und des Erddruckes.

[3] EYTELWEIN, Handbuch der Statik fester Körper. I. u. II. Band. 1808. III. Band. 1809.

[4] Mémoires de l'academie des sciences. 1729—30.

[5] LOHMEYER. Theorie der Kreisgewölbe. Crelles Journal für die Baukunst. 18. Band. 1843. S. 208.

[6] Mémoires extraits de la bibliothèque des ponts et chaussées. 2. Band.

im allgemeinen fünf Bruchpunkte: in der Scheitelfuge, in *zwei* Punkten zwischen Scheitel und Kämpfer und in den beiden Kämpferfugen, wenn keine Widerlager da waren, sonst in der Sohle der Widerlager (**46**). Die von BOISTARD auf Grund seiner Versuche ausgebildete Theorie wurde von GAUTHEY (1732—1806) in dessen berühmtes Werk über die Konstruktion der Brücken[1] aufgenommen.

2. Als der eigentliche Begründer der Gewölbetheorie gilt heute COULOMB[2], der berühmte Ingenieur und Mathematiker (1736—1806). Aber selbst er stellt noch die Einsturzgefahr infolge des Gleitens mit in den Vordergrund seiner Untersuchungen. Er betrachtet ein als starr vorausgesetztes Wölbstück vom Gewichte V zwischen dem Scheitel c und einer beliebigen Fuge m und entwickelt für die beiden Fälle des Kantens und Gleitens die beiden Gleichgewichts-Bedingungen

$$H_1 = V\frac{x}{y}$$

und

$$H_2 = \frac{V}{\operatorname{tg}(\varphi + \alpha)},$$

wenn x und y Hebelarme von V und der Bogenkraft H_1 in Bezug auf m, und α den Reibungswinkel von Stein auf Stein bedeuten. Mit Hilfe der Theorie der Maxima und Minima ermittelte er dann den ungünstigsten Winkel φ einer Fuge mit der Lotrechten. Diesen Winkel nannte er *Bruch*winkel und die zugehörige Fuge *Bruch*fuge.

COULOMBS Theorie wurde wesentlich berichtigt und erweitert von AUDOY[3] (1820). Dieser betrachtete die Gewölbe, wie sie es ihrer Gestalt und *physischen Natur* nach wirklich sind, indem er sich dabei auf die Versuche BOISTARDS stützte, nach welchen *eine Gleitgefahr nicht vorliegt*. Im übrigen bestätigt er die Richtigkeit der Untersuchungen COULOMBS. Spätere Untersuchungen, namentlich von LAMÉ und CLAPEYRON[4] (1823), NAVIER[5] (1833), GARIDEL[6] (1835) und PETIT[7] (1835) bilden meist erweiterte Anwendungen auf besondere Fälle. Die Arbeit von PETIT findet sich in deutscher Übersetzung in der schon erwähnten geschichtlichen

[1] Nach dem Tode GAUTHEYS von seinem Neffen NAVIER herausgegeben (1809—1813).

[2] Application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture. 1773 abgedruckt in den »Mémoires des savants étrangers de l'Académie de Paris«.

[3] Mémorial de l'officier du génie. 1820. Nr. 4. S. 1—96.

[4] Annales des mines. Band 7. 1832.

[5] Application de la mécanique à l'établissement des constructions. 2. Aufl. 1839.

[6] Mémorial de l'officier du génie. Nr. 12. 1835. S. 7—72.

[7] Daselbst S. 72—150.

Abhandlung von LOHMEYER (S. 243). PETIT sagt u. a.: »Im standfesten Gewölbe gibt es eigentlich keine Bruchfuge mehr; die Wölbsteine berühren sich nicht mehr an der Kante allein; man muß hier annehmen, daß die obern und die untern Wölbsteine sich der ganzen Länge ihrer Fuge nach berühren und daß nur die Fuge des Schlußsteines, diejenige der Kämpfersteine und gewisse Fugen nahe der Mitte zwischen Scheitel und Kämpfer sich leichter als die andern öffnen werden. Hieraus ergibt sich, daß der Angriffspunkt des Druckes, oder vielmehr die Mittelkraft aus allen Pressungen in der Schlußsteinfuge nicht mehr in der obern Kante, sondern in einem Punkte zwischen dem obern und untern Wölbrande liege. Um diesen Punkt zu finden, müßte man das Gesetz der Pressungen kennen, das für die beiden äußersten Fugen Geltung hat. Dies Gesetz ist uns aber unbekannt.«

NAVIER (1785—1836) erweiterte und bereicherte die Gewölbetheorie namentlich dadurch, daß er zeigte, wie die außer dem Fugenmittel angreifende Längskraft nicht nur blos eine reine Druckspannung — wie man bis dahin annahm — sondern auch eine *Biegungs*spannung verursachen müsse, deren Berechnung auf Grund des Elastizitätsgesetzes, und seiner bekannten Annahmen (I. **42**) möglich sei. Aber bis etwa zur Mitte des 19. Jahrhunderts wurde von dieser wichtigen theoretischen Errungenschaft so gut wie garnicht Gebrauch gemacht, wie weiterhin (unter c) nachgewiesen werden wird.

3. Die erweiterte Theorie COULOMBS — die sog. *Kantungs*theorie — bildet auch heute noch ein lehrreiches Mittel, um durch Auftragen der Maximal- und Minimal-Stützlinien die Möglichkeiten des Einsturzes von Gewölben anschaulich zu machen. Das wichtigste Hilfsmittel dabei, *die graphischen Methoden*, lieferte PONCELET (1788—1867). Vor ihm hatten zwar LAMÉ und CLAPEYRON[1] (1826) schon Kraftecke und Seilecke benutzt, um mit deren Hilfe *Kettenlinien* darzustellen. Es bleibt aber immerhin ein hohes Verdienst PONCELETS, diese wichtigsten Hilfsmittel der graphischen Statik zum ersten Male systematisch in den Dienst der Technik gestellt zu haben, nicht allein für den Maschinenbau, sondern besonders auch für die Theorie der Gewölbe und des Erddrucks[2]. Außerdem schrieb PONCELET später eine ausführliche geschichtliche Abhandlung über die Gewölbetheorie[3], worin er bereits die Ansicht aussprach, *daß eine richtige Gewölbetheorie allein auf die Gesetze der*

[1] Journal des Voies de Communication. Petersburg. 1826. S. 35 und 1827, S. 44.
[2] Mémorial de l'officier du génie. 1835. Nr. 12 (Gewölbe) und Nr. 13 (Erddruck).
[3] Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Band 35. 2. Nov. 1852.

Elastizität begründet werden könne. BRIX (1798—1870) hat PONCELETS Arbeiten benutzt (1849), um Kettenlinien geometrisch darstellen zu können [1]. Im übrigen blieben PONCELETS Arbeiten, sowie namentlich aber die Abhandlungen der genannten Nachfolger COULOMBS, wie AUDOY, GARIDEL und PETIT lange Zeit nach ihrem Erscheinen in Deutschland noch unbeachtet. Das kam wohl daher, daß die Schriften jener Männer zuerst in Büchern erschienen sind, die im Buchhandel nicht zu haben waren.

4. GERSTNER der Ältere (1756—1832), Begründer des polytechnischen Institutes in Prag, dessen »Handbuch der Mechanik« 1831 [2] zuerst erschien und später von seinem Sohne, dem Ingenieur ANTON VON GERSTNER weiter herausgegeben wurde, hat die »*Stützlinie*« in das Gebiet der Gewölbetheorie eingeführt. Vorher hatte GERSTNER, als Erster, die Gleichung der sog. *Kettenbrückenlinie* gegeben, d. i. einer Seillinie oder Kettenlinie, die außer dem eigenen *veränderlichen* Gewichte des Seiles oder der Kette auch noch eine *gleichmäßig* verteilte Last einer Brückenfahrbahn und Einzellasten zu tragen hat. GERSTNER betrachtete dabei die Kette als einen Körper von überall gleichem Widerstande, der vom Scheitel bis zu den Aufhängepunkten gleichmäßig mit der Achsenkraft wächst. Durch die eingehende Beschäftigung mit dieser Linie mag er wohl auf den Gedanken gekommen sein, mit gleichen mathematischen Hilfsmitteln auch für ein Gewölbe eine Seillinie zu berechnen, indem er dieses in seiner Gleichgewichtslage als ein umgekehrtes Seil betrachtete. So wurde durch GERSTNER die »Theorie der Stützlinie« angebahnt. GERSTNER legte der Möglichkeit des Gleitens noch Bedeutung bei. Das besagt seine Forderung, wonach die Fugenrichtungen überall *senkrecht* zur Richtung der betreffenden Mittelkraft angelegt werden sollen. Heute dagegen stellt man die Fugenrichtungen in der Regel senkrecht zur *innern* Wölblinie.

Weil in einer wirklichen Seil- oder Kettenlinie die Bogenkraft *Zug*spannungen hervorruft, während die Stützlinie eines Bogens immer *Druck*spannungen erfährt, so nannte man die Stützlinie bald auch »*Drucklinie*«. Allgemeiner und treffender als »Stützlinie« und »Drucklinie« dürfte wohl die heute viel gebrauchte Bezeichnung »*Mittelkraftlinie*« sein, denn eine solche Linie kann für Einzellasten (als Seileck) oder für stetige Lasten (als Seillinie) gezeichnet werden. Für die Berechnung kommt es ja wesentlich nur darauf an, den *Stützpunkt* (I. **64**)

[1] BRIX. Statik fester Körper 1831. 2. Aufl. 1849.

[2] Als 1. Band. 2. Aufl. von seinem Sohne 1832—34. 3 Bände.

einer beliebigen Fuge des Bogens, sowie auch *Größe* und *Richtung* der *betreffenden* dort angreifenden *Mittelkraft* festzulegen. Dies alles liefert aber allein schon die Mittelkraftlinie, mit dem zu ihrer Darstellung benutzten Krafteck, ganz gleich, ob Einzellasten oder stetige Lasten in Frage kommen. Denn im Falle stetiger Lasten bildet für lotrecht gelegte Schnitte die im Stützpunkte der Fuge angreifende *betreffende* Mittelkraft des der Seillinie umschriebenen Seilecks eine Berührungsgerade zur Seillinie (**36**, b und c).

b. Moseley-Scheffler-Schwedler-Hagen.

1. MOSELEY (1802—1872), Professor an der Universität Oxford, der seinen, im Vergleich mit den Franzosen in der Theorie etwas zurückgebliebenen Landsleuten die Arbeiten NAVIERS und PONCELETS auf dem Gebiete der Baumechanik vorführte, veröffentlichte auch selbst viele eigene Arbeiten. Darunter war seine Gewölbetheorie, die seinerzeit Aufsehen erregte. Bis dahin (1833) fußten alle Theorien mehr oder minder auf den von COULOMB geschaffenen Grundlagen. Keiner der genannten Forscher trat ernstlich der Frage nahe, *welche der unendlich vielen Mittelkraftlinien denn wohl die wahre sei.* MOSELEY war der Erste, der den Weg zur Lösung dieser Frage beschritt. Um zunächst erkennen zu lassen, wie MOSELEY im übrigen den Standpunkt COULOMBS teilte, bringen wir nachfolgend einen Auszug aus einem seiner Aufsätze, den er vom November 1839 datiert und worin auch die Unterschiede zwischen den Begriffen der »*Stützlinie*« und der »*Mittelkraftlinie*« klar hervorgehoben werden[1]. Es heißt dort[2]:

»Die ganze Frage der Standfestigkeit der Konstruktionen erstreckt sich auf die Untersuchung der beiden Bedingungen, daß ein aus geeigneten Steinen (Fig. 184)[3] gebildeter Bau $MKLN$ entweder dadurch aus dem statischen Gleichgewichte kommt, daß gewisse Berührungsflächen (Fugen) aufeinander *gleiten*, oder daß sich die betreffenden Steine um ihre Kanten drehen. Nehmen wir hiernach an, der ganze Bau bestehe aus einer einzigen Reihe von in den Fugen *ohne Mörtel* verbundenen Steinen beliebiger Gestalt, auf welche irgend welche Druckkräfte wirken und wovon 1—2 eine beliebige Fuge ist. Weiter sei aA die Mittelkraft aller auf den Theil M—N—2—1 wirkenden Kräfte und

[1] Nach RÜHLMANN, Vorträge über Geschichte der Technischen Mechanik. 1885. S. 443.

[2] Enthalten in der von JOHN WEALE veranstalteten Ausgabe des Sammelwerkes: »The theorie, practice and architecture of bridges«, London 1843 im Bande I. unter der Überschrift: »Theoretical and practical papers on bridges«.

[3] Die Figur ist der von MOSELEY selbst gegebenen nachgebildet.

ferner werde angenommen, die Schnittfläche 1—2 ändere sich nach Lage und Gestalt derart, daß sie nach und nach den in unserer Figur dargestellten Fugen 3—4, 5—6, 7—8, 9—10 usw. entspreche. Dann wird man, wie *aA* für 1—2, für die verschiedenen aufeinander folgenden Schnittflächen jetzt *bB*, *cC*, *dD*, *eE* als Mittelkräfte annehmen können.

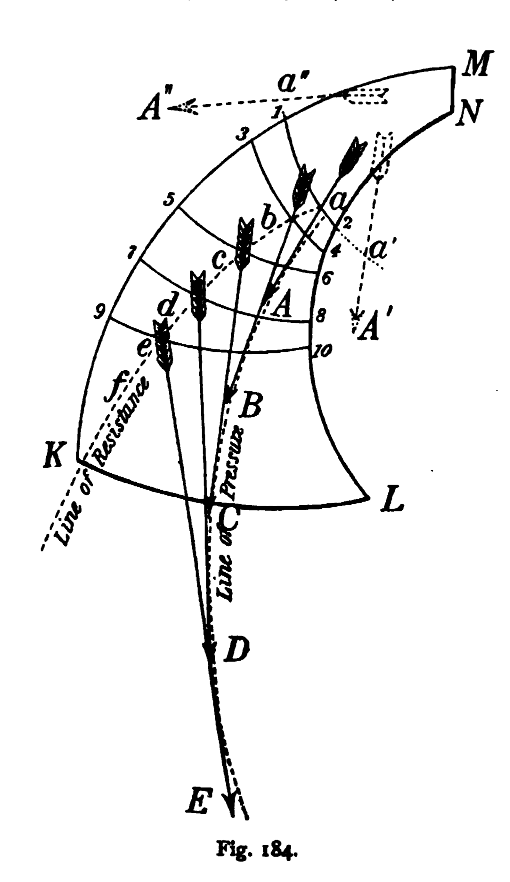


Fig. 184.

In jeder dieser Lagen wird die betreffende Mittelkraft entweder innerhalb oder außerhalb der Konstruktion liegen. Liegt sie außerhalb, d. h. ist *a'A'* die Mittelkraft und erfolgt ihr Durchgang im Punkte *a'* der nach innen verlängerten Fuge 1—2, so wird der in der Richtung *a'A'* tätige Druck offenbar bestrebt sein, den Teil *N*—*M*—1—2 um die Kante 2 der Fuge 1—2 zu drehen. Selbstverständlich würde das Drehen um die äußere Kante 1 geschehen, falls *a''A''* die Richtung der Mittelkraft wäre, sowie zweifellos, wenn *aA* diese Richtung wäre, weder um die Kante 1 noch um die Kante 2 ein Drehen erfolgen könnte.

Stellt man sich jetzt die Berührungsflächen der einzelnen Steine einander unendlich nahe liegend vor, so werden ihre Durchgangspunkte *a*, *b*, *c*, *d* usw. eine Linie bilden, die ich »*Widerstandslinie* (Line of Resistance)« nenne[1], daß man durch Auffinden dieser Linie in einer bestimmten Konstruktion die *erste* der vorbezeichneten Gleichgewichts-Bedingungen ermitteln kann, bedarf keiner besondern Erörterung.

Was die *zweite* Bedingung, die Beurteilung der Standfestigkeit in

---

[1] Das ist die sog. *Stützlinie* (I. 64, b).

Hinsicht auf ein mögliches *Gleiten* der Bausteine aufeinander anlangt, so wird das betreffende Gleichgewicht jedenfalls eintreten, sobald die Richtung der Mittelkraft überall innerhalb des sog. Reibungskegels verbleibt. Zur weiteren Erläuterung denken wir uns die Linie *ABCDE* als geometrischen Ort aller aufeinander folgenden Durchgangspunkte der Mittelkräfte *aA*, *bB*, *cC*, *dD* usw. Diese Linie nenne ich *Drucklinie* (Line of Pressure). Ihre geometrische Gestalt läßt sich unter den nämlichen Umständen bestimmen, wie die »Widerstandslinie«. Eine Gerade *cC*, die vom Punkte *c*, wo die Widerstandslinie *abcd* die Fuge 5—6 schneidet, als Tangente an die Drucklinie *ABCD* gezogen wird, bestimmt sonach die *Richtung* der in der Fuge 5—6 angreifenden Mittelkraft. Liegt diese Mittelkraft innerhalb des Reibungskegels, so wird *kein Gleiten* des Baues in der zugehörigen Fuge eintreten, tritt sie jedoch heraus, so wird das Gleiten beginnen[1].«

Nach unsern Erörterungen (unter a) ist es klar, daß einerseits Moseleys »Drucklinie« gleichbedeutend mit unserer heutigen »Mittelkraftlinie« ist und anderseits, daß es der Darstellung einer »Stützlinie« nicht bedarf, weil alle notwendigen Berechnungsstücke, wie Lage des Stützpunktes, einschließlich Richtung und Größe der Mittelkraft einer Fuge allein aus der Mittelkraftlinie zu erhalten sind. Man erkennt aus obigem Auszuge auch, wie Moseley sonst im wesentlichen noch auf den von Coulomb vorgezeichneten Grundlagen der Gewölbetheorie steht. An anderer Stelle hat er jedoch insofern neues gebracht, als er über die *Lage der Mittelkraftlinie* im Gewölbe eine bestimmte Theorie aufstellte.

2. Moseley stützt seine Theorie auf »a new principle in statics«, wie er sagt. Er nennt es »Principle of least Pressure« oder *Satz vom kleinsten Widerstande*[2].

Moseley faßt den Satz, den er mathematisch beweist[3], in folgende Worte: »Wenn eine Anzahl von Kräften mit einem Systeme von

---

[1] Eine rechnerische Darstellung der »Line of Resistance« und »Line of Pressure« hat Moseley im 6. Bande der »Cambridge philosophical transactions« niedergelegt.

[2] Der Satz ist eigentlich nichts anderes als das zuerst von Maupertuis (1698—1759) aufgestellte, in den Memoiren der Berliner Akademie der Wissenschaften 1746, S. 265 veröffentlichte »principe de la moindre action«, das auch Lagrange zur Lösung schwieriger Aufgaben der Dynamik angewendet hat. Rühlmann. Vorträge über Geschichte der Technischen Mechanik. 1885. S. 209—210.

[3] London philosophical Magazine. 1833. Band III. Juli—Dezember S. 285. — Vgl. auch Moseley. Theoretical and practical papers on bridges (1839). Vol. I des von John Weale herausgegebenen Sammelwerkes: The Theorie, Practice and Architecture of Bridges etc. London. 1843.

Widerständen in Gleichgewicht ist, dann sind diese solche, deren Summe ein *Minimum* ist; jeder Widerstand angesehen als eine Funktion der positiv genommenen Koordinaten seines Angriffspunktes, und den Bedingungen unterworfen, die das Gleichgewicht des Ganzen fordert.« Bei der Anwendung des Satzes betrachtet MOSELEY das Gewölbe nach erfolgtem Schlusse im Scheitel, im Augenblicke wo das bis dahin tragende Lehrgerüst entfernt und der Bogen seiner Last überlassen wird. Dies sog. *Ausrüsten* erfolgt ganz allmählich, so daß der Bogen auch allmählich erst seine ganze Last aufnimmt. Dabei muß in entsprechendem Maße auch die Bogenkraft wachsen. Nach MOSELEY wächst diese nur so lange, bis sie gerade groß genug ist, um das Gewölbe zum Alleintragen zu befähigen. Trägt also das Gewölbe, so entsteht eine Stützlinie, die der kleinsten Bogenkraft entspricht.

Neu an MOSELEYS Betrachtung ist nur der Weg, auf welchem er zu seinem Ergebnis kam. Das Ergebnis selbst war für die damalige Zeit, wo man den Bogen noch als *starren* Körper ansah, nicht mehr ganz neu. Man kannte bereits die Grenzlagen der Stützlinie (**46**), aber man übersah, daß in praktischen Fällen die *wahre* Stützlinie niemals durch die *Rand*punkte der Wölbsteine verlaufen kann, weil diese dort sonst unendlich große Spannungen aushalten müßten. Als man den Widerspruch zwischen dem tatsächlichen Verhalten der Steine und den rein mathematischen Ergebnissen der Kantungstheorie erkannte, glaubte man ihn zuerst in folgender Art lösen zu können. Man nahm auf Grund von MOSELEYS Theorie an, die Stützlinie werde in Wirklichkeit soweit von den innern und äußern Rändern des Bogens entfernt bleiben, als es unbedingt nötig sei, um die zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes erforderliche kleinste Bogenkraft zu erzeugen, so daß dabei die Randspannungen innerhalb der zulässigen Grenzen bleiben. Die Unhaltbarkeit einer solchen gewagten Annahme liegt heute auf der Hand: die wahre Stützlinie rückt allerdings selbsttätig weit genug vom Rande ab, das geschieht aber allein infolge des *elastischen* Verhaltens der Wölbsteine und nicht etwa aus »*Schlauheit*« des Baustoffes, wie WINKLER in seinen Vorträgen an der Berliner technischen Hochschule gelegentlich bemerkt hat.

3. SCHEFFLER, der MOSELEYS vortreffliches Werk »The mechanical principles of engineering and architecture«, erschienen in London 1843, im Jahre 1845 in deutscher Sprache herausgab, hat sich auch der Gewölbetheorie dieses Forschers warm angenommen[1], indem er sie für

[1] SCHEFFLER, Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken. 1857.

den praktischen Gebrauch einrichtete und erweiterte. Einen nachhaltigen Erfolg konnte er damit nicht erzielen. Notwendig mußte sich vorerst die Einsicht Bahn brechen, daß allein die *elastischen* Eigenschaften der Wölbstoffe als Grundlage für die Ermittelung der wahren Lage der Mittelkraftlinie dienen können. MOSELEYS und SCHEFFLERS Arbeiten haben aber jedenfalls viel zur Klärung schwebender Fragen der Gewölbetheorie beigetragen und namentlich auch erneuten Anstoß zu wissenschaftlichen Untersuchungen über die *günstigste Gestalt eines Wölbbogens* gegeben.

HAGEN (1797—1884), der weltberühmte Verfasser des »Handbuch der Wasserbaukunst«, als Oberlandesbaudirektor die erste technische »Exzellenz« des Königreichs Preußen, hat im Jahre 1844 seine Ansichten über die Form und Stärke der Gewölbe in einer besondern Schrift niedergelegt[1]. Er legt die Stützlinie durch die Mitte der Scheitel- und Kämpferfuge und verlangt eine Verbesserung der Form oder der Belastung des Gewölbes an denjenigen Stellen, wo die Stützlinie den Rändern zu nahe komme. In den neuern Bearbeitungen seiner Schrift (1862 und 1874) gründet er seine Berechnungen auf das *Gesetz der günstigsten Beanspruchung* und ermittelt dabei die diesem am besten entsprechende Lage der Stützlinie. Das ist nach ihm eine Stützlinie, die derart im Bogen liegt, *daß die lotrechte Projektion ihres kleinsten Abstandes vom innern oder äußern Gewölberande* sowohl im Scheitel als auch in den Bruch- und Kämpferfugen die gleiche wird. Setzt man Form und Stärke des Gewölbes, sowie auch seine Belastungslinie mit einer solchen Stützlinie in Einklang, so erhält man die geringst möglichen Fugendrücke.

SCHWEDLER (1823—1895), der erste Konstrukteur seiner Zeit, dessen schon im I. Bande (**44**, S. 86) und auch in einer Anmerkung S. 78 gedacht worden ist, hat, obwohl er nur ein Gelegenheitsschriftsteller war[2], auch die Gewölbetheorie durch namhafte Beiträge bereichert. In seiner ersten Arbeit (1859) entwickelt er seine Theorie der Stützlinie und berechnet dabei die Belastungslinien für Kreis- und Korbbogengewölbe, sowie auch die Gewölbeform für wagerecht abgeglichene Belastung[3]. Später (1868 und 1869) veröffentlichte er noch eine bemerkenswerte Arbeit über Flachbogen[4]. Darin erscheint zum ersten Male die

---

[1] HAGEN. Über Form und Stärke gewölbter Bogen. 1844. Davon erschien 1862 eine neue Bearbeitung und 1874 deren 2. Auflage.

[2] SARRAZIN. JOHANN WILHELM SCHWEDLER. Zeitschr. f. Bauwesen. 1895. S. 9.

[3] SCHWEDLER. Theorie der Stützlinie, ein Beitrag zur Form und Stärke gewölbter Bogen. Zeitschr. f. Bauw. 1859. S. 109.

[4] SCHWEDLER. Über die Stabilität der flachen tonnenförmigen Kappengewölbe. Zeitschr. f. Bauw. 1868. S. 468.

später von TOLKMITT[1] erneut aufgenommene Idee einer sog. *mittlern* Belastung (**44**, b). SCHWEDLER ersetzt nämlich die *halbseitige* Belastung q aus dem Verkehr durch eine über die *ganze* Bogenweite reichende gleichmäßige Last von $\frac{q}{2}$, von welcher er eine Hälfte als *positiv*, die andere als *negativ* wirkend einführt. Verfasser hat dies SCHWEDLERsche Verfahren insofern erweitert, als er die einseitige Laststrecke *bis zur Lastscheide* durchführt, um so mit Hilfe der zugehörigen Einflußfläche das größte Moment und dessen Ort unmittelbar berechnen zu können. Das ist, wie leicht einzusehen auch möglich, wenn die Einflußfläche *mehr als eine* Lastscheide hat, wie einige derjenigen Flächen, die in der Elastizitätstheorie verwendet werden (**41**, b). SCHWEDLERS Untersuchungen waren analytisch durchgeführt. Die Methoden der graphischen Statik hatten damals, außer in Zürich, wo CULMANN wirkte (I. **42**) und abgesehen von vereinzelten Fällen ihrer Verwendung in Frankreich, noch keinen Boden gefaßt.

c. Die Anfänge der Elastizitätstheorie.

1. Weil die ausführliche Darstellung der geschichtlichen Entwickelung der Elastizitätstheorie der Vollwandbogen dem III. Bande dieser Vorlesungen vorbehalten ist, so wird davon an dieser Stelle nur insoweit die Rede sein, als es notwendig erscheint, um die (unter **43** und **44**) gegebenen einleitenden »Betrachtungen über die Grundlagen der Elastizitätstheorie«, sowie über »Näherungsberechnungen« auch noch nach der geschichtlichen Seite hin zu beleuchten.

Die von CULMANN (1821—81) dem Begründer der graphischen Statik (I. **43**) im Jahre 1866[2] veröffentlichte Gewölbetheorie, die lange Zeit hindurch zahlreiche Anhänger fand, ist keine vollkommene Elastizitätstheorie insofern, als CULMANN darin die elastischen Eigenschaften der Wölbsteine nicht berücksichtigt, diese vielmehr noch als starr ansieht, sondern nur das sog. *Setzen* des Gewölbes in Rechnung stellt, d. h. also *die elastische Formänderung des nachgiebigen Fugenmörtels* nach erfolgtem Ausrüsten des Bogens. Dabei geht CULMANN von der Minimalstützlinie (**46**, a) aus und zeigt, wie deren starke Pressungen in der Nähe der Gewölberänder zu einem Ausweichen des Mörtels an diesen Stellen führen und dadurch ein Sinken der Stützlinie im Scheitel und ihr Heben in Bruch- und Kämpferfugen veranlassen. Denn in dem Maße

---

[1] TOLKMITT. Beitrag zur Theorie gewölbter Bogen. Zeitschr. f. Bauw. 1876. S. 402. — Die Berechnung der Gewölbestärke und Bogenform massiver Brücken. Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-Ver. in Hannover. 1878. S. 451.

[2] CULMANN. Die graphische Statik. 1. Aufl. 1866. In der 2. Aufl. (1875) geht CULMANN zur schärferen Elastizitätstheorie über.

wie der Mörtel an den bezeichneten Stellen nachgäbe, kämen tiefere Stellen stärker als vorher zur Lastübertragung. Weiter setzt er, wie MOSELEY und HAGEN, die Gültigkeit des *Satzes von der günstigsten Beanspruchung* voraus und so kommt er zum Schlusse, daß derjenige Gleichgewichtszustand des Bogens der günstigste sei, bei welchem die überhaupt größten Grenzwerte der Randspannungen ihren kleinstmöglichen Wert erreichen. Die Ergebnisse der CULMANNschen Theorie nähern sich, wie FÖPPL[1] hervorgehoben hat, stark denjenigen der vollkommenen Elastizitätstheorie. Ähnliche Theorien wie CULMANN entwickelten CARVALLO[2] (1853) und besonders DURAND-CLAYE[3] (1867).

Wie schon erwähnt, hatte PONCELET bereits im Jahre 1852 ausgesprochen, daß eine richtige Gewölbetheorie nur auf Elastizitätsrechnungen zu begründen sei, aber in damaliger Zeit war man noch weit entfernt davon, einen Gewölbebogen, sowie einen *eisernen* Vollwandbogen als durchweg vollkommen genug elastisch anzusehen. NAVIER hatte zwar schon gelehrt, wie man die Spannungen im Gewölbe auf Grund des Elastizitätsgesetzes berechnen müsse, aber, soweit bekannt, war CARVALLO der erste Ingenieur, der (1853) die NAVIERsche Biegungstheorie in ihrem vollen Umfange bei der Gewölbeberechnung verwendete[4]. Es mußten erst eine Reihe von Versuchen über das elastische Verhalten der Steine und der Gewölbe voraufgehen, ehe sich die Überzeugung Bahn brechen konnte, daß es wohl zulässig sei, einen Steinbogen als so ausreichend elastisch anzusehen, um seine Form und Stärke wie bei einem *eisernen* Bogen, durch Elastizitäts-Berechnungen festzulegen.

2. THOMAS YOUNG (1773—1829) führte den Begriff des *Dehnungsmaßes* ein, unter der Benennung »modulus of elasticy«[5]. THOMAS TREDGOLD (1788—1829) war wohl der Erste, der neben seinen berühmten Versuchen über die Festigkeit des Eisens[6] auch das elastische Verhalten von Steinen untersuchte. Aber erst die Versuche BAUSCHINGERS (1834—1893)

---

[1] FÖPPL. Theorie der Gewölbe. 1881.

[2] CARVALLO. Étude sur la stabilité des voûtes. Ann. des ponts et chauss. 1853. I. Deutsch von TELLKAMPF, unter dem Titel »Beiträge zur Gewölbetheorie«. 1855.

[3] DURAND-CLAYE. Sur la vérification de la stabilité des voûtes en maçonnerie et sur l'emploi des courbes de pression. Daselbst 1867. I. S. 63. — 1868. I. S. 109. — 1880. I. S. 416.

[4] PONCELET. Examen historique et critique des principales théories concernant l'équilibre des voûtes. 1854. Vgl. TELLKAMPFS Bearbeitung im »Notizblatt des hannov. Arch.- u. Ingen.-Ver.« 1854. Band III. Heft 3, S. 322.

[5] YOUNG. A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts. London. 1807. II. § 319. S. 46.

[6] A practical essay of cast iron and other metals. London. 1824. Deutsch 1826.

im mechanisch-technischen Laboratorium der Technischen Hochschule in München beseitigten jeden Zweifel darüber, daß auch die Formänderungen der Steine, für praktische Aufgaben genau genug, auf Grund des Elastizitätsgesetzes (I. **4** und **122**) berechnet werden dürfen. Auch die Beobachtungen der elastischen Formänderungen steinerner Gewölbe durch Köpcke[1], de Perrodil[2], sowie namentlich die Versuche der Gewölbe-Ausschüsse des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins[3] haben das Obige bestätigt.

Winkler (1835—1888) wendete (1867) zuerst die Elastizitätstheorie auf Bogen ohne Gelenke an. Ihm gebührt außerdem das besonders hoch zu schätzende Verdienst, die *wahre Lage der Mittelkraftlinie* im Gewölbe, auf Grund des Satzes vom Minimum der Formänderungsarbeit in anschaulicher Weise festgelegt zu haben[4]. Unter gewissen wohl zulässigen Voraussetzungen bewies er, daß die wahre Stützlinie sich immer möglichst eng an die Bogenachse schließt, so daß man sagen darf: *Die Mittelkraftlinie wird, im Sinne der Wahrscheinlichkeits-Rechnung, von der Bogenachse ausgeglichen, derart, daß die Summe der Quadrate ihrer Abstände von dieser ein Minimum wird.* Der unter **43** bewiesene Satz, wonach die Mittelkraftlinie von der *günstigsten* Bogenachse immer in mindestens drei, bei symmetrischer Anordnung von Belastung und Gewölbe, in vier Punkten geschnitten wird, rührt ebenfalls von Winkler her.

Wie schon unter **43** und **44** gesagt, sind die Schwierigkeiten, die eine genaue analytische oder graphische Darstellung von Mittelkraftlinien mit Hilfe der Elastizitätstheorie bereitet, groß. Deshalb hat schon Winkler, als er seine bahnbrechenden Untersuchungen über Bogenträger anstellte, (1868) von *Einflußlinien* Gebrauch gemacht, die er damals noch »*Spannungskurven*« nannte. Ihm gebührt danach auch noch das Verdienst, diese hochwichtigen Linien in die graphische Statik eingeführt zu haben[5]. Gleichzeitig verwendete auch Mohr[6] die Einflußlinien, und zwar unabhängig von Winkler; Weyrauch (1873) nannte sie zuerst

[1] Köpcke. Die Messung von Bewegungen an Bauwerken mit der Libelle. Protokolle des sächs. Ing.-Ver. 1877.

[2] de Perrodil. Arc d'expérience, Rapport. Ann. des ponts et chaussées. 1882.

[3] Zeitschr. des Oesterr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1895. Nr. 20—34 und 1901. Nr. 25.

[4] Winkler. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. 1867. S. 268. — Lage der Stützlinie im Gewölbe. Deutsche Bauz. 1879. S. 117, 127 u. 130. — 1880, S. 58, 184, 210 und 243.

[5] Mitteilungen des Arch.- u. Ing.-Ver. f. Böhmen. 1868, S. 6. — 1869, S. 1. — Vergl. auch Winkler, Theorie der Brücken. 1. Heft. Äußere Kräfte der Balkenträger. III. Aufl. S. 28.

[6] Mohr. Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen. Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover. 1868. S. 19.

Influenzlinien[1]. Aber trotz der durch die Einflußlinien geschaffenen großen Erleichterung und Übersichtlichkeit der Elastizitätsberechnungen, erscheinen diese im Vergleich zu den beschriebenen Näherungsrechnungen (**44**) doch immer noch recht umständlich und verwickelt. Das ist der Hauptgrund, der heute noch für die Verwendung der Näherungsmethode spricht. Das von Tolkmitt eingeführte Verfahren ist dabei besonders zu empfehlen. Verfasser glaubt jedoch, daß auch dies Verfahren, wie er nachgewiesen hat (**41**, **44** und **45**), bei Verwendung von Einflußlinien und unter Zugrundelegung einer Mittelkraftlinie für diejenige Lastlage, die das überhaupt größte Moment liefert, noch vereinfacht und verbessert werden kann.

§ 9. Einführung in die Theorie des Erddruckes.

51. Die älteren Anschauungen bis auf Coulomb. Wie im vorstehenden geschichtlichen Rückblicke hervorgehoben wurde, besaß Frankreich die ersten theoretisch geschulten Techniker (S. 242). Sie gehörten entweder zum Korps der Straßen- und Brückenbau-Ingenieure, oder es waren Ingenieuroffiziere. Zu den Letztgenannten zählten u. a. auch Coulomb und Poncelet, deren grundlegende Arbeiten auf dem Gebiete der Gewölbetheorie bereits erwähnt worden sind. Diesen beiden ausgezeichneten Ingenieuren gebührt auch der Ruhm, die Entwickelung der Erddrucktheorie angebahnt und wesentlich gefördert zu haben.

Sowohl beim Bau von Erddämmen, als auch beim Hinterfüllen von Mauern mit Erdreich verschiedener Art, konnten die französischen Ingenieure frühe schon Beobachtungen anstellen, einerseits über das Gleichgewicht von aufgeschütteten Erdmassen an sich, andererseits aber namentlich auch über die Wirkung des Erddruckes gegen die Hinterwand der sog. *Stützmauern*, die im Wege-, Brücken- und besonders im damaligen Festungsbau in mannigfachen Querschnittsgestalten hergestellt wurden. Die Notwendigkeit, Formen und Stärken solcher Stützmauern im voraus zweckentsprechend und sicher genug bemessen zu können, veranlaßte dann die Beobachter allmählich zu schärferen theoretischen Untersuchungen. So entwickelten sich die ersten Erddrucktheorien.

a. Der Winkel der natürlichen Böschung. Beim Schütten von Dämmen aus erdigen oder sandigen Massen hat man von Alters her beobachtet, wie das Gleichgewicht der Seitenflächen eines Dammes — der sog. *Böschungen* — gestört wird, sobald deren Neigung gegen die

---

[1] Weyrauch. Theorie und Berechnung der kontinuierlichen und einfachen Träger. 1873.

Schwerkraftrichtung *zu steil* angelegt worden war. In solchen Fällen sah man das in der Böschung ruhende Erdreich so lange abrutschen oder abrollen, bis der für die Erdart passende Neigungswinkel sich dadurch von selbst gebildet hatte. Die ältern Schriftsteller nahmen diesen Winkel meist zu 45 Grad an, ohne dabei die Verschiedenheit der Erdarten zu berücksichtigen. Heute wissen wir, daß der Winkel, je nach der Beschaffenheit der aufgeschütteten Masse, veränderlich und dabei sowohl von der *Schubfestigkeit* (Cohäsion) als auch von der *Reibung* zwischen den Massenteilchen abhängig ist. Es wird weiterhin auch ausführlich dargelegt werden, wie notwendig und wichtig es ist, diesen sog. *Winkel der natürlichen Böschung* bei der Berechnung von Stützmauern in jedem Falle nach Maßgabe der örtlichen Verhältnisse so genau wie möglich voraus zu bestimmen. Denn seine Größe ist für die Größe des Erddrucks auf Stützmauern von wesentlichem Einflusse. Es ist ja in die Augen fallend, wie z. B. Erdmassen, die stark ineinander *haften*, d. h. die eine starke Schubfestigkeit (Cohäsion) besitzen, ohne aus dem Gleichgewicht zu kommen, mit lotrechten oder nahezu lotrechten Wänden aufgeschüttet werden können. Mauern, die vor derartigen, keinen Seitendruck ausübenden festen Erdmassen (klüftigem Fels und dergl.) hergestellt werden, nennt man heute *Futtermauern*, zum Unterschiede von *Stützmauern*, auf deren Hinterwand das zu stützende Erdreich einen Erddruck ausübt. Futtermauern sind danach ausschließlich Bekleidungsmauern, deren Stärke ohne Rechnung nach rein praktischen Regeln festgesetzt wird.

Sehr ausführliche Angaben über die ältesten Erddrucktheorien finden sich in einem Werke von MAYNIEL[1]. Danach war das Ziel aller dieser ersten Theorien, den Widerstand zu finden, den eine Stützmauer dem Drucke eines Erdprismas entgegenstellt, das von der lotrechten Hinterwand der Mauer, einer in Mauerhöhe wagerecht abgeglichenen Erdhinterfüllung und der natürlichen Böschung begrenzt ist (Fig. 185). Wir werden das Prisma immer nur im Querschnitt zu betrachten brauchen, indem wir die Tiefenabmessung der Mauer — wie bei den Gewölben (**39**, b) — gleich der Einheit rechnen und voraussetzen, daß in jedem Querschnitte hinsichtlich der Anordnung der Konstruktion und der Beschaffenheit der Baustoffe gleiche Verhältnisse vorliegen. Die drei Grenzlinien des Prisma-Querschnittes sollen fortan kurzweg mit *Wand*linie, *Erd*linie und *Böschung* bezeichnet werden.

[1] Traité expérimental, analytique et pratique de la poussée des terres et des murs de revêtement. Paris. 1808.

Den bezeichneten Widerstand, oder den ebenso großen Erddruck, verglich man mit derjenigen Kraft, die gerade noch groß genug ist, um ein Abgleiten des Prismas auf der Böschung zu verhindern. Dabei dachte man sich das Gewicht G des Prismas in seinem Schwerpunkte s vereinigt und den Gegendruck Q in der Gleitfläche ik senkrecht zu dieser. Die *Richtung* des Erddruckes E nahm man parallel zur Böschung an. Damit waren auch *Größe* und *Angriffspunkt* des Erddruckes festgelegt.

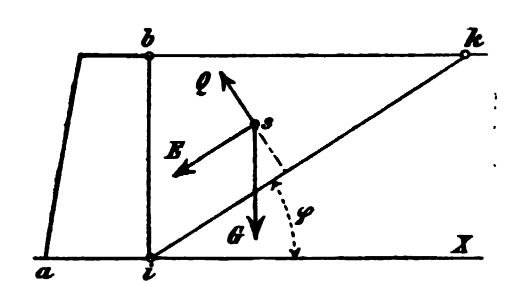


Fig. 185.

Bei dieser Art der Rechnung wurde, abgesehen davon, daß man den Einfluß der Reibung und Kohäsion im Erdreich, sowie auch die Reibung zwischen Wand und Erde vernachlässigte, ein Fehler insofern gemacht, als man die drei Kräfte G, Q und E im *Schwerpunkte* s des Prismas angreifend dachte, obwohl die Richtungen dieser Kräfte im Falle des Gleichgewichtes sich nur in der Schwerpunkts-Lotrechten zu treffen brauchen, also im allgemeinen nicht im Schwerpunkte selbst.

Viele Theoretiker haben vorgezogen, das Prisma nicht gleich anfangs als ein Ganzes zu betrachten, sondern es mit Hilfe von zur Böschungsebene parallelen Ebenen in Schichten zu zerlegen, wobei sie für die einzelnen Schichten den gleichen (angegebenen) Rechnungsgang verfolgen. Auf solche Weise erhielten sie die auf den entsprechenden *Teilflächen* der Hinterwand wirkenden elementaren oder Teilerddrücke und somit auch ein Bild von der Art der *Verteilung* des Gesamterddruckes E über die Wand, denn E ist ja die *Mittelkraft* aller Teilerddrücke.

Nach Mayniel findet sich der obige Gedankengang schon ausgesprochen in den Werken der Architekten Bullet und Rondelet[1], sowie auch in verschiedenen Denkschriften von französischen Ingenieuroffizieren (1767 und 1774). In Deutschland hat man damit sogar noch um die Wende des 18. und 19. Jahrhunderts gerechnet, also zu einer Zeit, wo es bereits richtigere Theorien gab[2].

[1] Bullet. Traité d'architecture pratique. 1691. — Rondelet. Traité théorique et pratique de l'art de bâtir.

[2] Vergl. hierzu die ausführlichen Literaturangaben in Kötter, Die Entwickelung der Lehre vom Erddruck. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. II. Band. 1891—92. S. 80.

Unter dem Titel »Théorie de divers ingénieurs« bespricht MAYNIEL auch eine von der obenerwähnten Theorie in einem wesentlichen Punkte abweichende Rechnungsweise, die darin besteht, daß die Richtung des Erddruckes E nicht parallel der Böschung, sondern senkrecht zur Hinterwand eingeführt wird. Eine solche Richtung könnte nur eintreten, wenn man es mit einer vollkommen glatten Wand zu tun hätte. Mit Rücksicht auf die zwischen Wand und Erde stets vorauszusetzende Reibung wird aber, wie weiterhin noch näher zur Sprache kommt, die Richtung des Erddruckes immer um einen gewissen Winkel von der Senkrechten zur Wand abweichen müssen. Die Annahme eines senkrecht zur Wand, also (im vorliegenden Falle) wagerecht gerichteten Erddruckes führt auch zu dem mit der Eigenart des Erdreichs unvereinbaren Ergebnis, daß *die Größe des Erddruckes unabhängig von dem Winkel der natürlichen Böschung ist*, denn, wie man leicht überblicken kann, sind dann bei beliebiger Lage der Böschung, die aus den drei Kräften G, Q und E gebildeten geschlossenen Kraftecke (I. **54**) immer dem Dreiecke des Prismas ibk (Fig. 185) ähnlich. Wählt man also den Erddruck E des Kraftecks gleich dem Höhenmaße ib der Wand, so bleibt E bei jeder Lage der ik unverändert.

Bei obiger Annahme einer wagerechten Richtung berechnet sich die Größe von E für eine Mauerhöhe $ib = h$ mit

$$E = G \operatorname{tg} \varphi \,,$$

wenn φ der Winkel der natürlichen Böschung ist (Fig. 185). Bezeichnet ferner γ das Gewicht der Kubikeinheit des Erdreiches, so erhält man

$$G = \gamma \cdot \frac{h \cdot \overline{bk}}{2} \,.$$

Weil $\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{\overline{bk}}$ ist, folgt

$$E = \gamma \cdot \frac{h^2}{2} \,.$$

Der Erddruck wäre danach gleich dem Drucke einer reibungs- und kohäsionslosen Flüssigkeit *von gleicher Dichte* wie das Erdreich. Dies Ergebnis stimmt mit der Wirklichkeit nicht überein, weil das Erdreich *nicht* reibungs- und kohäsionslos ist, wie Wasser und andere Flüssigkeiten und weil deshalb auch nicht, wie die ältern Schriftsteller angenommen haben, der Gegendruck Q irgend einer Gleitfläche ik senkrecht zu dieser gerichtet sein kann.

b. Der Gegendruck in einer Gleitfläche. Eine wesentlich richtigere Auffassung bei der Lösung der Aufgabe, die Größe des

Erddruckes zu ermitteln, zeigte zuerst COUPLET[1]. Das Erdreich denkt er sich aus gleichartigen, kugelförmigen und in bestimmter Weise aufgeschichteten Sandkörnern bestehend. Dabei kommt er zu dem Schlusse, 1) daß die Sandkörner unmittelbar an der Hinterwand anders gestützt werden, als im Innern der Sandmasse und 2) daß das Gewicht G des Prismas in zwei Seitenkräfte E und Q zu zerlegen sei, von denen der Erddruck E senkrecht zur Hinterwand wirke und der Gegendruck Q der Gleitfläche eine von dem Winkel der Böschung ik abhängige Richtung habe, die aber *auf jener nicht senkrecht stehen könne.*

Wenn nun auch COUPLET bei der Durchführung seiner Theorie unbegründeter Weise wie viele seiner Vorgänger die drei Kräfte G, Q und E noch im Schwerpunkte des Prismas angreifen läßt und wenn er andererseits auch willkürliche, der Wirklichkeit wenig entsprechende Annahmen über die Lagerung der Sandkörner macht, so bleibt ihm doch immerhin das Verdienst, der Erste gewesen zu sein, der den Einfluß der Reibung des Erdreichs (an der Mauer und in sich) auf die Größe des Erddrucks berücksichtigt hat. Dadurch erst kam er zu der wichtigen Erkenntnis, daß der Gegendruck Q der Gleitfläche nicht senkrecht zu dieser stehen könne, weil in der Trennungsebene selbst Kräfte auftreten, die dem Abgleiten des Prismas Widerstand leisten. Daß diese Kräfte Reibungswiderstände und Schubspannungen waren, wurde bald erkannt.

Gestützt auf COUPLETS Untersuchungen bestimmten BELIDOR und andere[2] nunmehr den Erddruck in mehr oder minder willkürlicher Weise derart, daß sie den, entweder senkrecht zur Wand oder parallel zur Böschung gerichtet angenommenen Erddruck, mit Rücksicht auf den Einfluß der Reibung um eine entsprechende Größe verminderten.

52. Die Theorie von Coulomb. In derselben Denkschrift[3], die COULOMBS grundlegende Sätze der Gewölbetheorie enthält (**50**, a), hat er auch seine Erddrucktheorie niedergelegt. Beide Theorien erscheinen darin als Anwendungen der Regeln von den Maxima und Minima auf Aufgaben des Bauwesens. Ehe wir auf den Rechnungsgang COULOMBS

---

[1] COUPLET. De la poussée des terres contre leurs revêtements et la force, qu'on leur doit opposer. Histoire de l'académie royale des sciences. Paris 1726—1728.

[2] Vergl. KÖTTER, a. a. O. S. 82. — MAYNIEL, a. a. O. S. 61.

[3] COULOMB. Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture. Mém. de mathématique et de physique présentés à l'Academie Royale des sciences par divers savants. Band VII. 1773. Paris 1776. — Deutsch in BÖHMS Magazin. Band V. 1779.

näher eingehen, soll vorangestellt werden, zu welchen neuen Ergebnissen der ausgezeichnete Ingenieur dabei gelangt ist.

a. Voraussetzungen und Ergebnisse. COULOMB begnügte sich nicht damit, die Gleitebene des Prismas mit der Ebene der natürlichen Böschung zusammen fallen zu lassen, oder sonst willkürlich anzunehmen, wie es seine Vorgänger getan hatten. Im Gegenteil, er betrachtete es als seine Hauptaufgabe, *die wirkliche Lage der Gleitfläche auf mathematischem Wege zu finden.* Unter der zwischen der Wandlinie und der Böschungslinie möglichen unendlich großen Zahl von Rutsch- oder Trennungsflächen im Erdreich, faßte er *zwei* bestimmte Flächen ins Auge, von denen die eine ein Prisma begrenzte, *dessen Abgleiten zu verhindern, den größten wagerecht gerichteten Widerstand erforderte.* Die Lage der andern Fläche wollte COULOMB durch die Bedingung bestimmen, daß der erwähnte wagerechte Widerstand so lange wächst, wie er es darf, ohne dabei das Prisma *die schiefe Ebene hinauf zu schieben.* So wollte er *zwei Grenzwerte* von Widerständen erhalten, von denen der untere, kleinere demjenigen Erddrucke E entspricht, den man heute — nach Analogie der Bogenkraft (**47.** b) — den *tätigen* Erddruck nennt. Diese untere Grenze des Widerstandes der Mauer hielt COULOMB für die maßgebende, weshalb er auch nur für sie einen analytischen Ausdruck ableitete.

COULOMB stellt auch den *Einfluß der Reibung* zwischen Mauer und Erdreich mit in Rechnung und zwar in der Weise, daß er außer der zur lotrechten Wand wagerecht gerichteten Seitenkraft A des Erddruckes E noch eine nach unten gerichtete Seitenkraft *in der Mauerfläche* wirkend annimmt, wobei er *das Verhältnis* dieser beiden Seitenkräfte als bekannt voraussetzt. Wenn er also im Verlaufe seiner Rechnung die untere Grenze des erwähnten Widerstandes gleich der wagerechten Seitenkraft A des Erddruckes E setzt, so bestimmt er mit dem Maximum jenes Widerstandes gleichzeitig auch das Maximum der wagerechten Seitenkraft von E. Bei feststehendem Verhältnisse beider Seitenkräfte von E bestimmt er danach also auch *den größten möglichen Erddruck E selbst.* Die *Kohäsion* berücksichtigt COULOMB dadurch, daß er dafür eine der Länge ik der gesuchten Gleitfläche proportionale Kraft einführt. Er nimmt also die widerstehende Schubkraft über die Gleitfläche gleichmäßig verteilt an. Die *Reibung im Erdreich* der Gleitfläche stellt er als einen Bruchteil des gesamten senkrecht zur Gleitfläche wirkenden Gegendruckes Q dar. Diese Reibung setzt er gleich $\frac{1}{n}$ von Q.

In Übereinstimmung mit seinen Vorgängern betrachtet COULOMB die

Gleitfläche, deren Lage er sucht, als eine Ebene, die durch die untere Kante (bei i) der Hinterwand verläuft. Die gleiche einfache Annahme liegt auch der heutigen Erddrucktheorie immer noch zugrunde, obwohl es richtiger wäre, die Grenze des Prismaquerschnittes in der Gleitfläche als *krumme* Linie vorauszusetzen, worüber auch COULOMB nicht mehr im Zweifel gewesen ist.

Seine Rechnung führt COULOMB wie folgt: Er zerlegt das Gewicht G des Prismas, sowie auch die beiden Seitenkräfte des Erddruckes E, je in zwei Seitenkräfte, von denen eine senkrecht und die andere parallel zur Schnittlinie der gesuchten Gleitfläche gerichtet ist. Es muß dann im Falle des Gleichgewichtes die Summe aller dieser senkrechten Seitenkräfte eine Reibung in der Gleitfläche hervorrufen, deren Größe gleich der Summe der zur Gleitfläche parallelen Seitenkräfte sein muß. COULOMB erhält danach *zwei Gleichgewichts-Bedingungen*. Die eine stellt die untere Grenze des Erddruckes dar, wenn Reibung und Kohäsion in der gesuchten Gleitfläche *aufwärts* wirken und die andere gilt, wenn diese Widerstände *abwärts* wirken. Beide Gleichungen enthalten also die gleichen Glieder, nur die *Vorzeichen* der erwähnten Widerstände sind darin verschieden. Als einzige vorkommende Veränderliche hat COULOMB die Länge bk der wagerechten Kathete des Prismaquerschnittes gewählt. Bezeichnet man diese mit x, so erhält man die untere Grenze des Erddruckes, wenn man x so wählt, daß der wagerechte Widerstand A ein Maximum wird. Durch das Maß von x bestimmt sich die gesuchte Lage der Gleitfläche. Ist dann das Maß der Reibung zwischen Wand und Erdreich gegeben, so hat man damit auch *Richtung und Größe* des Erddruckes E gefunden. Der *Angriffspunkt* des Erddruckes liegt in der zur Gleitfläche parallelen Schwerlinie des Prismas, also um $\frac{2}{3}$ der Wandhöhe von der Mauerkrone ab.

COULOMB erhielt danach

$$x = h\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n}\right).$$

Dieser Ausdruck, in welchem h die Höhe der Wand vorstellt und worin $\frac{1}{n}$ den erwähnten Einfluß der Reibung im Erdreich der Gleitfläche veranschaulicht, erscheint unabhängig vom Einflusse der Kohäsion. Durch Einsetzen obigen Wertes von x in die betreffende Gleichgewichts-Bedingung bestimmte COULOMB schließlich die wagerechte Seitenkraft A des Erddruckes mit

$$A = mh^2 - \delta \cdot l \cdot h, \tag{115}$$

worin δ der gleichmäßig über die Länge der Gleitfläche verteilt gedachte Widerstand der Kohäsion ist, während m und l Funktionen des in jedem Falle gegebenen Bruches $\frac{1}{n}$ bedeuten.

b. Die Bedeutung der Ergebnisse Coulombs. COULOMB untersuchte zwar, wie alle seine Vorgänger, nur den Fall einer Stützmauer mit lotrechter Hinterwand und wagerecht abgeglichener Hinterfüllung. Sein gesamtes Rechnungsverfahren gründet sich aber auf neue, durchweg zutreffende Voraussetzungen und Annahmen, insofern er es als seine Hauptaufgabe angesehen hat, die wahre Lage der Gleitfläche zu finden, und zwar unter Berücksichtigung der Reibung und Kohäsion im Erdreiche, sowie auch der Reibung zwischen Erde und Wand. COULOMB hat später sogar auch noch den Einfluß einer von der Erdhinterfüllung zu tragenden Einzellast untersucht. Die Bedeutung der theoretischen Arbeiten COULOMBS erkennt man am besten aus der Tatsache, daß seine Anschauungen in allen ihren wesentlichen Punkten auch heute noch die anerkannt gültigen und herrschenden sind, wenn es sich um die Berechnung von Stützmauern handelt.

In einem Punkte ist COULOMB selbst in neuerer Zeit noch öfter mißverstanden worden. COULOMB nennt nämlich das von der Gleitfläche begrenzte sog. Gleit- oder Rutschprisma ein *Prisma des größten Druckes.* Er wählt aber diese Bezeichnung nur der Abkürzung wegen. Wie seine Rechnung klar erkennen läßt, meint er damit *ein Prisma, dessen Abgleiten zu verhindern, den größten Widerstand A erfordert.* In der Folgezeit hat man aber unter dem Prisma des größten Druckes häufig etwas anderes verstanden. Man hat geglaubt, daß die verschiedenen Prismen, die durch je eine Gleitfläche abgetrennt gedacht werden, auch verschieden große Drücke auf die Wand ausüben und daß darunter ein Prisma wäre, das den größten Druck liefere. Das war eine irrtümliche Auffassung, die COULOMB zweifellos nicht geteilt hat. Denn der Widerstand, den die Mauer leisten kann, ist unabhängig von der Lage der Gleitfläche. Im Falle des Gleichgewichtes ist der Druck jedes Prismas gleich dem Widerstande der Mauer. Der Widerstand aber, der erforderlich ist, um ein Prisma am Abgleiten zu verhindern, ändert sich mit der Lage seiner Gleitfläche. Deshalb bestimmt COULOMB richtig das Maximum dieses Widerstandes, um daraus den maßgebenden Erddruck zu berechnen.

KÖTTER[1] geht in seiner lehrreichen Schrift über die Entwicklung

[1] a. a. O. S. 87.

der Erddrucktheorien auf diesen Punkt näher ein. Wenn er sich dabei aber gegen REBHANN und WINKLER wendet und diesen beiden hervorragenden neueren Förderern der Erddrucktheorie vorwirft, nicht die Urschrift COULOMBS, sondern nur einen deutschen Auszug daraus benutzt zu haben, so geht er darin nach der Ansicht des Verfassers etwas weit. Zunächst ist zu bedenken, daß die Zeit, in welcher REBHANN und WINKLER schrieben, heute über 30 Jahre hinter uns liegt. Wer kann heute wissen, welche zwingenden Gründe vorlagen, wenn die beiden Genannten sich damals mit der bloßen Einsicht eines Auszuges der Denkschrift COULOMBS begnügten. Jedenfalls handelten sie in gutem Glauben. Besonders WINKLER, dem die neuere Erddrucktheorie so vieles verdankt, war — wie Verfasser in jahrelangem engeren Verkehr mit diesem uneigennützigen Forscher erfahren hat — von einer Besonnenheit des Urteils und Gründlichkeit des Schaffens, wie kaum eine der heute auf gleichem Felde ackernden Persönlichkeiten. Verfasser ist nebenbei überzeugt, daß es auch heute noch manche Schriftsteller gibt, die nach vielen Richtungen hin ausgezeichnetes bieten, ohne daß sie alle in ihren Abhandlungen angezogenen Urschriften selbst gelesen haben.

53. Die Erddrucktheorien des 19. Jahrhunderts.

a. Coulombs Nachfolger bis auf Poncelet. Die grundlegenden Arbeiten COULOMBS sind wohl erst im Anfange des 19. Jahrhunderts weiteren Kreisen bekannt geworden. Einzelne noch aus dem Ende des 18. Jahrhunderts stammende deutsche Veröffentlichungen über Erddruck scheinen selbständige Arbeiten gewesen zu sein, obwohl die darin gegebenen Theorien mit derjenigen COULOMBS eine starke Verwandtschaft zeigen[1]. Besonders zu nennen ist WOLTMANN (1757—1837), der bekannte Wasserbauingenieur, seit 1812 Wasserbaudirektor in Hamburg, der viele vorzügliche mathematische und wasserbaufachliche Schriften hinterlassen hat. WOLTMANNS Theorie des Erddruckes leidet an manchen Unklarheiten. Ihm gebührt aber das Verdienst, an Stelle der Reibungs*ziffer* zwischen Erde und Erde den Reibungswinkel eingeführt zu haben, wodurch die Rechnungen übersichtlicher und einfacher geworden sind[2].

Die Erweiterungen der Theorie COULOMBS im Anfange des 19. Jahrhundets beschränkten sich auf die Sonderfälle einer gegen die Lotrechte *geneigten hinteren Wandlinie* und die einer *oberhalb* der Mauerkrone

---

[1] KÖTTER, a. a. O. S. 88.

[2] WOLTMANN, Beiträge zur hydraulischen Architektur. III. Band. 1794. IV. Band. 1799.

liegenden Erdlinie mit oder ohne *Überlast*. Prony und Eytelwein behandelten den Fall der geneigten Hinterwand, wobei sie u. a. den Fehler begingen, den Erddruck *wagerecht* anzunehmen, was nur bei *lotrechter glatter* Wand berechtigt gewesen wäre. Für eine lotrechte Wand leitet Prony den Satz ab, *wonach die Gleitfläche den Winkel zwischen Wand und Böschungslinie halbiert*[1].

Français, Audoy und Navier untersuchen einzelne Fälle, in welchen die Erdlinie nicht mehr wagerecht in der Mauerkrone, sondern überhöht liegt und überlastet ist[2]. Diese Untersuchungen zeigen, wie schwierig und umständlich es ist, die Ergebnisse allgemeinerer Fälle der Rechnung in einigermaßen einfache Ausdrücke zu kleiden. Man braucht nur einmal die von obigen Nachfolgern Coulombs, noch dazu für die genannten so einfachen Konstruktions- und Belastungsfälle erhaltenen höchst verwickelten Formeln anzusehen, um zu erkennen, welch großes Verdienst Poncelet sich erworben hat, als er, als erster auf einem ganz neuen Gebiete (**50**, a) *die graphische Behandlung der Aufgaben der Erddrucktheorie* anbahnte. Was Coulomb in den rechnerischen Grundlagen für den einfachsten Fall scharf vorzeichnete, erweiterte Poncelet graphisch auf die Fälle der *geneigten Wandlinie* und der *beliebig gebrochenen* Erdlinie[3].

Poncelet berücksichtigt nur die *Reibung*, nicht aber die Schubkraft der Erdschichten, um derart den Sicherheitsgrad der Konstruktion (I. **20**) zu erhöhen. Ein solches Vorgehen empfiehlt sich auch aus theoretischem Grunde, weil der Widerstand der Reibung erst zur Wirkung gelangen kann, wenn die Schubkraft bereits überwunden worden ist. Die Reibung zwischen Wand und Erde stellt er voll in Rechnung, in der Annahme, daß die in der Erde widerstehenden Kräfte erst voll aufgebraucht werden müssen, ehe der Grenzfall des Gleichgewichts eintreten

---

[1] de Prony. Recherches sur la poussée des terres. 1802. Gilly u. Eytelwein. Praktische Anweisung zur Wasserbaukunst. III. 1805. S. 101—130.

[2] Français. Recherches sur la poussée de terres sur la forme et les dimensions des revêtements et sur le talus d'excavation. Mémorial de l'officier du génie. IV. 1820. S. 157—206. Audoy. Note additionnelle au mémoire de M. Michaux sur la constr. des revêtements. Daselbst XI. 1832, S. 349—374. Navier. Leçons sur l'application de la mécanique à l'établissemant des constructions et des machines. II. Auflage. 1839.

[3] Poncelet. Mémoire sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations. Note additionnelle sur les relations analytiques qui lient entre elles la poussée et la butée de la terre. Mémorial de l'officier du génie. XIII. 1840. S. 261—270. Deutsch von Lohmeyer. Über die Stabilität der Erdbekleidungen und deren Fundamente. 1844.

kann. Das Gleit- oder Rutschprisma denkt sich PONCELET also, nach dem Vorgange COULOMBS, wie *einen Keil wirkend*, der (beim tätigen Erddruck) zwischen Wand und Gleitfläche zu sinken droht.

b. Erweiterung der von Coulomb und Poncelet geschaffenen Grundlagen. Das Anwendungsgebiet der Erddrucktheorie, besonders also bei Berechnung von Stützmauern, ist seit COULOMB und PONCELET hauptsächlich nach der graphischen Seite hin vervollkommnet und bereichert worden. Sehr bald erkannte man den hohen Wert der von PONCELET eingeführten graphischen Methoden und nachdem diese dann durch CULMANN, in seiner »Graphischen Statik« auf breiten wissenschaftlichen Boden gestellt worden waren (1866), dauerte es nicht lange, bis selbst die schwierigsten Sonderfälle der Erddruckberechnung, bei denen eine rein analytische Behandlung versagen mußte, verhältnismäßig einfache graphische Lösungen gefunden hatten. Von dieser Zeit ab stehen sowohl bei der Berechnung der Gewölbe (**50**) als auch der Stützmauern die graphischen Methoden mit Recht im Vordergrunde (I. **43**). Dabei sind die von COULOMB und PONCELET geschaffenen analytisch-graphischen Grundlagen der Berechnung bis heute im wesentlichen nicht verlassen worden.

Die im Laufe der Zeit eingeführten neuen Rechnungen oder Darstellungen beziehen sich hauptsächlich auf besondere praktische Konstruktionsfälle, wie sie weiterhin (namentlich im § 10) auch nach der geschichtlichen Seite hin, im einzelnen besprochen werden. Daneben laufen Betrachtungen über gewisse *offene Fragen*, z. B. über *Richtung und Angriffspunkt des Erddruckes*, über die *wahre Gestalt der Gleitfläche* usw. Die bedeutendsten älteren Arbeiten auf dem Anwendungsgebiete der Erddrucktheorie rühren von REBHANN und WINKLER her[1]. Die neueren Arbeiten WINKLERS[2] wurden vom Verfasser im folgenden besonders berücksichtigt.

54. Die Richtung des Erddruckes.

a. Der tätige Erddruck. Wie beim Kanten von Gewölbewiderlagern (**47**, b) eine tätige und eine ruhende Bogenkraft unterschieden wurde, so ist auch beim *Kanten* von Stützmauern ein tätiger und ruhender Erddruck zu unterscheiden. In praktischen Fällen handelt es sich in

---

[1] REBHANN. Theorie des Erddruckes und der Futtermauern mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen. 1871. — WINKLER. Neue Theorie des Erddrucks nebst einer Geschichte der Theorie des Erddrucks und der hierüber angestellten Versuche. 1872.

[2] WINKLER. Vorträge über die Theorie des Erddrucks, gehalten an der königl. techn. Hochschule in Berlin. Als Manuskript gedruckt. 1880. — Über Erddruck auf gebrochene oder gekrümmte Wandflächen. Centralbl. d. Bauverw. 1885, S. 73.

der Regel nur um die Gefahr eines Kantens um die Vorderkante *a* in der Sohle der Stützmauer (Fig. 186), also nur um einen etwaigen Sturz der Mauer *nach außen*. Der Fall eines ruhenden Erddruckes kommt, wie weiterhin erörtert wird, nur ausnahmsweise vor. Deshalb hat schon COULOMB sich fast ausschließlich auf die Ermittelung des tätigen Erddruckes beschränkt (**52**), den er für den Grenzfall des Gleichgewichts um den Reibungswinkel φ (zwischen Wand und Erde) gegen die Wandlotrechte *nach oben* gerichtet annahm (Fig. 186), so daß der Reibungswiderstand einem *Herabsinken* des Gleitprismas entgegen wirkt. PONCELET, der darin dem Vorgange COULOMBS folgte, bestimmte graphisch die Lage einer ebenen Gleitfläche für den Grenzfall des tätigen Erddruckes, worauf er die *Größe des Erddruckes E* aus dem geschlossenen Kraftecke (I. **54**) entnahm, das aus den drei im Gleichgewicht stehenden äußeren Kräften E, Q und G gebildet wird, wenn Q den um den Reibungswinkel φ des Erdreiches von der Gleitflächen-Lotrechten abweichenden Gegendruck Q der Gleitfläche und G das Gewicht des Gleitprismas bezeichnet.

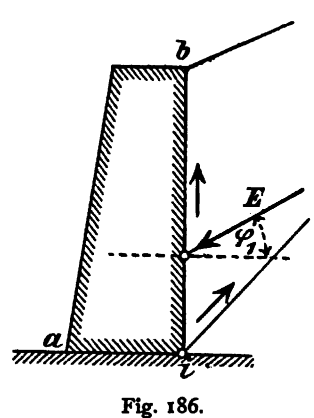


Fig. 186.

Die Voraussetzung von COULOMB und PONCELET, wonach im betrachteten Grenzfalle die Reibung zwischen Wand und Erde zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts *voll aufgebraucht* werden müsse, wird von mancher Seite heute noch als willkürlich oder nicht voll begründet hingestellt, weil dabei das *elastische Verhalten* der Erdhinterfüllung und der Stützmauer unberücksichtigt geblieben sei. Derartige Einwände gegen obige Voraussetzungen erscheinen dem Verfasser von vornherein als hinfällig. Denn jede Rücksichtnahme auf die *elastischen* Eigenschaften sowohl der Hinterfüllung, als auch der Mauer und des Bodens, auf welchem deren Sohle *ai* (Fig. 186) gestützt ist, muß so lange hintenangestellt bleiben, bis man, wie bei Gewölben, auch bei der Berechnung von Stützmauern eine einwandfreie Elastitizitätstheorie besitzt. So lange dies nicht der Fall ist, wird man sich damit begnügen müssen, Gleitfläche und Gleitprisma, sowie auch Mauer und Boden als starr anzusehen. Geschieht dies, so befindet sich das Gleitprisma in der Lage eines Keiles, der zwischen der Wand und der Gleitfläche zu sinken droht und der bei *verschwindend kleinen* Bewegungen der Mauer auf jenen beiden Flächen Reibungen erzeugt, die im Grenzfalle des Gleichgewichtes ihre größten Werte erreichen.

Aus dem elastischen Verhalten der Konstruktionsstoffe ist bislang die wahre Richtung des Erddruckes noch nicht nachgewiesen worden. Versuche, die etwa darauf hinzielen, aus den beobachteten Formänderungen von elastischen, mit Sand hinterfüllten Stäben, auf das Verhalten von Stützmauern, besonders auf die wirkliche Richtung des Erddruckes, zurückzuschließen, haben — nach des Verfassers Meinung — wenig Wert, weil bei solchen Versuchen die besondere Art der Hinterfüllung und Stützung von Stützmauern unmöglich derart zutreffend zur Erscheinung gebracht werden kann.

b. Der ruhende Erddruck. Wie auch der Querschnitt einer Stützmauer sonst gestaltet sein möge, *sein Schwerpunkt muß unterstützt sein*, d. h. die zugehörige Schwerlinie muß die Sohle der Mauer innerhalb der Randpunkte a und i schneiden. Denn sonst würde die Mauer nach erfolgter Herstellung umfallen, ehe sie mit Erde hinterfüllt worden ist. Daraus folgt, daß die Stützmauer *an sich* einen Druck auf ihre Hinterfüllung nicht ausübt, mit andern Worten also, daß *ein ruhender Erddruck* nicht vorhanden ist. Bei *Erdbekleidungen* (Fig. 187) ist allerdings der Schwerpunkt s des Querschnittes nicht immer unterstützt. Das Gewicht K der Bekleidung drückt zuweilen auf die Erdschicht bd. Infolgedessen entsteht ein sog. *ruhender Erddruck*. Setzt man *starres* Gleichgewicht voraus, so muß im vorliegenden Beispiele (Fig. 187) die Mittelkraft R aus dem Gewichte K und dem ruhenden Erddrucke E_r irgend einen Punkt der Kronenlinie der Stützmauer treffen. Verläuft R durch den Randpunkt b, so bedeutet das denjenigen Grenzfall des Gleichgewichtes, bei welchem der ruhende Erddruck seinen kleinsten Wert erreicht. Sobald man also (mit Coulomb und Poncelet) die Richtung des ruhenden Erddruckes um den Reibungswinkel φ_1 (zwischen Wand und Erde) von der Wandsenkrechten nach unten abweichend annimmt, ist die Größe des auf die Stützmauerkrone ausgeübten Druckes R bestimmt, denn R, K und E_r bilden ein geschlossenes Krafteck (Fig. 187). So lange die Richtung von R außerhalb der bc liegt, kann ein elastisches

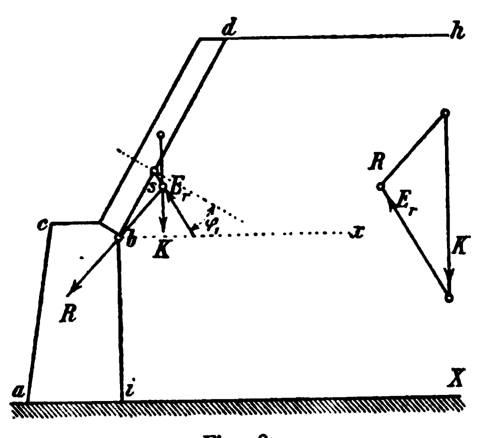


Fig. 187.

Gleichgewicht (I. 2, b) noch nicht eintreten. Die Bekleidung drückt dann auf das Erdreich und *ändert deren Form*, bis endlich R in den Randpunkt b rückt. Dann ist Gleichgewicht vorhanden, wenn Bekleidung und Mauer als starr angenommen werden.

Sobald ein Schub von außen her auf die Vorderwand einer bereits hinterfüllten Stützmauer wirkt, entsteht auch ein ruhender Erddruck (Fig. 188). Ob in diesem Falle, ebenso wie beim tätigen Erddrucke, die Gleitfläche durch den innern Randpunkt der Sohle ai verläuft, ist nicht nachzuweisen. Daher bleibt die Bestimmung der Lage der Gleitfläche und der Größe des ruhenden Erddruckes unsicher.

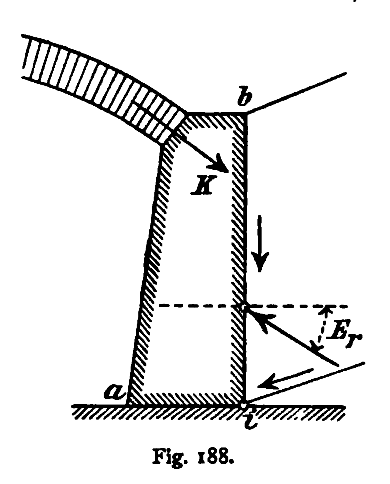


Fig. 188.

55. Die Lage der Gleitfläche und die Größe des Erddruckes.

a. Die wahre Gestalt der Gleitfläche. Wenn man, wie es Poncelet getan hat, die Richtungen des Erddruckes E und des Gegendruckes Q der Gleitfläche durch die Größe der Reibung des Erdreichs (auf der Wand und in sich) als gegeben ansieht und wenn man ferner die beiden Richtungen (wie notwendig) sich in einem und demselben Punkte auf der Lotrechten des Gleitprisma-Gewichtes G schneiden läßt, so stehen diese Festsetzungen mit der weiteren Annahme einer *ebenen* Gleitfläche in Widerspruch. Das hat zuerst Mohr nachgewiesen[1]. Genau genommen kann obigen Bedingungen nur durch die Einführung einer für jeden Fall zu bestimmenden *gekrümmten* Gleitfläche voll entsprochen werden. Die Gestalt der Krümmung ist aber sehr schwierig festzustellen, wenigstens sind die Versuche dazu bislang gescheitert[2]. Coulombs einfache (und für praktische Fälle völlig ausreichende) Annahme einer *ebenen* Gleitfläche wird daher bis auf weiteres beizubehalten sein. Übrigens war schon Coulomb sich darüber klar, daß seine Annahme der Wirklichkeit nicht genau entsprechen könne. Er spricht es geradezu aus, daß nur der Wunsch, seine Theorie einfach und den Beteiligten recht verständlich zu machen,

[1] Mohr. Beitrag zur Theorie des Erddrucks. Zeitschr. des Ingenieur- und Architekten-Vereins Hannover. 1871. S. 344. — Vergl. S. 494 Winklers Bemerkungen dazu. Ferner 1872, S. 67, die entscheidende Entgegnung Mohrs.

[2] Kötter a. a. O. S. 109.

ihn veranlaßt habe, von der Voraussetzung einer ebenen Gleitfläche auszugehen. Er hat sogar einen Versuch gemacht, die wirkliche Gestalt der Gleitfläche festzulegen[1].

b. Darstellung der Lage einer ebenen Gleitfläche. PONCELETS Darstellung bezog sich auf den Fall einer geneigten Wandlinie und

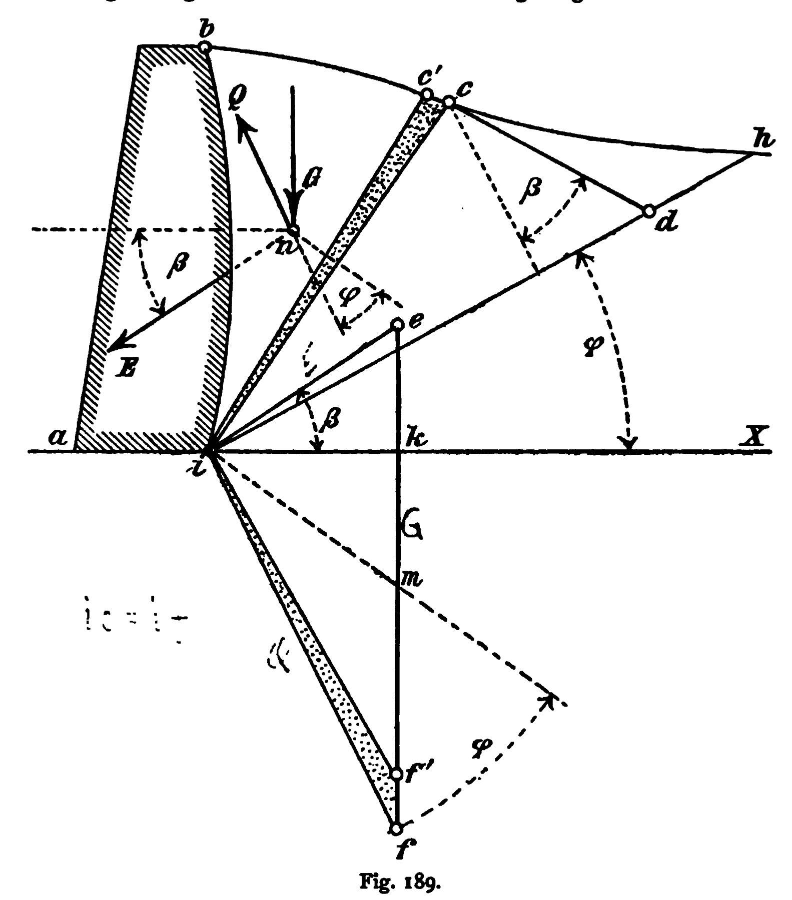


Fig. 189.

einer gebrochenen Erdlinie (53, a). REBHANN erweiterte die Darstellung durch die Annahme einer beliebigen Querschnittsgestalt für Wand- und Erdlinie. Den von REBHANN aufgestellten grundlegenden Satz von der Lage der Gleitfläche geben wir nach dem von WINKLER dafür geführten Beweise[2].

[1] KÖTTER a. a. O. S. 107.

[2] WINKLER, Vorlesungen a. a. O.

1. Im Querschnitt der Konstruktion, die senkrecht zur Bildebene eine Tiefe gleich der Maßeinheit besitzt, sei bi die *Wandlinie*, bh die *Erdlinie*; ih die Linie der natürlichen Böschung, deren Neigung zur Wagerechten aX gleich dem Reibungswinkel φ des Erdreichs ist. E sei die *Mittelkraft* aller *Teil*erddrücke auf der Wand ib, ihr Winkel zur Wagerechten β.

Wir nehmen an, ic sei der Schnitt der gesuchten Gleitfläche und denken uns die ic um einen verschwindend kleinen Winkel cic' gedreht. Das aus dem Erddrucke E, dem Gewichte G des Gleitprismas ibc und dem Gegendrucke Q der Gleitfläche zu bildende Krafteck ist als Dreieck ief aufgetragen und dabei (maßstäblich) die dem Drucke Q entsprechende Seite if gleich der Länge ic der Gleitfläche gemacht worden. $\overline{if}$ ist parallel zur Richtung von Q. Macht man noch die Strecke ff' gleich dem Gewichte des verschwindend kleinen Prismas icc' der Tiefe 1, so bedeutet der Winkel fif' den Winkel, den bei der Verschiebung des Punktes c nach c' die beiden Senkrechten zu $\overline{ic}$ und $\overline{ic'}$ miteinander einschließen.

Bezeichnet man allgemein den Winkel, um welchen (bei irgend einer Lage der Gleitfläche ic) der Gegendruck Q von der Gleitflächen-Senkrechten abweicht, mit δ, so kann δ von Null bis auf φ, den Winkel der natürlichen Böschung wachsen. Im Augenblicke wo $\delta = \varphi$ wird, also sein *Maximum* erreicht, nimmt $\overline{ic}$ die Lage der wirklichen Gleitfläche an. δ erreicht aber sein Maximum für diejenige Lage der $\overline{ic}$, *die seine Änderung zu Null macht.* Bestimmt man danach allgemein die *Winkeländerung* $d\delta$ und setzt diese gleich Null, so erhält man damit eine Bedingungsgleichung für die Lage der wirklichen Gleitfläche.

Die Winkeländerung $d\delta$ besteht aus zwei Teilen. Sie ist gleich dem Winkel cic', vermindert um den Winkel fif', den die beiden Senkrechten zur $\overline{ic}$ und $\overline{ic'}$ miteinander einschließen.

Aus

$$\sphericalangle cic' - \sphericalangle fif' = 0$$

folgt

$$1) \quad \sphericalangle cic' = \sphericalangle fif'.$$

Es ist weiter anzuschreiben:

$$\frac{\text{Fl. } ibc}{\text{Fl. } icc'} = \frac{\overline{ef}}{\overline{ff'}}$$

und

$$\frac{\text{Fl.} fie}{\text{Fl.} fif'} = \frac{\overline{ef}}{\overline{ff'}},$$

woraus

$$\frac{\text{Fl. } ibc}{\text{Fl. } fie} = \frac{\text{Fl. } icc'}{\text{Fl. } fif'}$$

folgt.

Weil nach vorigem $\overline{ic} = \overline{if}$ gemacht, und nach Gl. 1) der eingeschlossene Winkel bei i in den verschwindend kleinen Dreiecken icc' und fif' gleich groß ist, so erhält man aus der Gleichheit dieser beiden Dreiecke die Bedingung

$$2) \quad \text{Fl. } fie = \text{Fl. } ibc.$$

Man fälle jetzt auf die natürliche Böschungslinie ih von c aus eine Senkrechte und trage daran die Gerade cd, so daß diese mit der Senkrechten den Winkel β einschließt, d. i. der Winkel, den die Richtung des Erddruckes E mit der Wagerechten bildet. Außerdem ziehe man noch durch i zur Gleitflächen-Senkrechten eine Parallele, die um den Winkel φ zur $\overline{if}$ geneigt ist. Dann erhält man folgende Beziehungen:

$$\sphericalangle fik = \sphericalangle mih$$
$$\sphericalangle fik + \sphericalangle ife = 90^\circ$$
$$\sphericalangle mih + \sphericalangle cih = 90^\circ.$$

Das gibt

$$\sphericalangle ife = \sphericalangle cih$$

und auch

$$\triangle fie \cong \triangle icd.$$

In Verbindung mit der Gl. 2) erhält man schließlich:

$$\textbf{Fl. } \boldsymbol{ibc} = \triangle \boldsymbol{icd}. \qquad (116)$$

Damit ist die Lage der Gleitfläche ic bestimmt. Bezeichnet man die Gerade cd als das *Erddruckmaß*, weil sie im einfachen Verhältnis zur Strecke ie des Erddruckes E steht, so läßt sich die Gl. (116) wie folgt in Worten ausdrücken:

Die Gleitfläche halbiert die von den Linien der Wand, der Erde, der natürlichen Böschung und dem Erddruckmaß gebildete Fläche.

Dieser Satz gilt für beliebige Gestalt der Wand- und Erdlinie.

c. Darstellung der Größe des Erddruckes. Wenn man nach einem weiterhin zu besprechenden Verfahren die Richtung der Mittelkraft E aller Teilerddrücke bestimmt hat, kennt man deren Winkel β mit der Wagerechten und ist darauf imstande nach dem vorigen, aus der Gl. (116) entspringenden Satze auch die Lage der Gleitfläche ic festzulegen. Dies sei in der Fig. 190 geschehen. Die Darstellung der Größe des Erddruckes erfolgt dann mit Hilfe des Erddruckmaßes cd.

Man mache $\overline{cd} = \overline{dm}$, wobei m in die natürliche Böschungslinie fällt. Das so erhaltene Dreieck cdm wird das *Druckdreieck* genannt. *Sein Flächeninhalt F multipliziert mit der Tiefe* 1 *und dem Gewichte* γ_e *der Kubikeinheit der Erde gibt die Größe von E*

$$E = \gamma_e \cdot 1 \cdot F. \tag{117}$$

Fig. 190.

Der Beweis für die Richtigkeit der Gl. (117) ergibt sich aus dem Vergleiche des Druckdreiecks cdm mit dem Kraftdreiecke ief. Es ist

$$\frac{\text{Fl. } cdm}{\text{Fl. } cdi} = \frac{\overline{dm}}{\overline{di}} = \frac{\overline{cd}}{\overline{di}} = \frac{\overline{ie}}{\overline{fe}} = \frac{E}{G}.$$

Ferner ist

$$G = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl. } ibc = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl. } cdi.$$

Danach ist auch

$$E = G \frac{\text{Fl. } cdm}{\text{Fl. } cdi} = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl. } cdi \cdot \frac{\text{Fl. } cdm}{\text{Fl. } cdi}$$

oder

$$E = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl. } cdm,$$

was zu beweisen war.

56. Theorie des Erddruckes im unbegrenzten Erdreiche.

a. Die Lage der Gleitflächen. Wenn man sich eine Erdmasse aufgeschüttet denkt, die nach allen Richtungen hin gleiche physikalische Eigenschaften zeigt, so wird es möglich sein, den Spannungszustand in irgend einem Punkte ihres Innern analytisch eindeutig festzulegen (I. **99**). Man darf dann wie bei der Berechnung von Stützmauern voraussetzen, daß die Belastungsverhältnisse für alle lotrechten Schnitte der Erdmasse die gleichen sind. So beschränkt sich die Aufgabe, die im Innern des Erdreiches entstehenden Spannungen zu berechnen, auf den Fall des *ebenen Spannungszustandes*, bei welchem die Spannung in *einer* der durch den fraglichen Punkt gelegt gedachten Koordinatenebenen gleich Null wird. Betrachtet man danach im Erdinnern ein unendlich kleines Prisma, dessen Querschnitt ein rechtwinkliges Dreieck abc bildet (I. **116—118**), so lege man die wagerechte Z-Achse senkrecht zur Bildebene, in welcher der Querschnitt liegt und lasse dessen beide Katheten mit je einer weitern Achse (X, Y) parallel sein (Fig. 191). Dann sind die Spannungen im *Schrägschnitte* der unter dem beliebigen Winkel α zur Wagerechten geneigten Hypotenuse bc in ähnlicher Weise zu berechnen, wie dies im I. Bande, in § 17, ausführlich dargelegt worden ist.

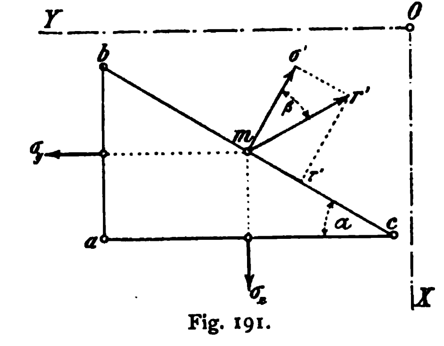


Fig. 191.

Die Spannung σ_x ist im vorliegenden Falle bekannt. Ist γ_e das Gewicht der Kubikeinheit des Erdreiches, so ist

$$\sigma_x = \gamma_e \cdot h,$$

wenn h die über der Fläche ac lastende Erdhöhe ist. Der Druck σ_x ist gleich demjenigen einer Flüssigkeit von der Dichte γ_e. Eine Schubspannung kann in der Fläche ac nicht auftreten, σ_x ist demnach eine *Hauptspannung*. Deshalb ist auch σ_y eine solche, so daß auch in der Fläche ab keine Schubspannung wirkt. Eine Achse der Spannungsellipse (I. **117**) liegt wagerecht, die andere lotrecht. Der Unterschied zwischen dem Spannungszustande in einer Flüssigkeit

und im Erdreich besteht nur darin, daß hier σ_x und σ_y nicht gleich groß sind. Das Verhältnis zwischen σ_x und σ_y soll jetzt gefunden werden. Stellt man zu dem Zwecke die Gleichgewichts-Bedingungen auf, so kann man daraus (wie im Falle I. **116**) zunächst die im Schrägschnitte *bc* wirkenden Spannungen σ' und τ' ableiten. Man erhält

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha . \tag{118}$$

r' sei die Mittelkraft von σ' und τ'. Ihr Winkel β mit der Schrägschnitt-Senkrechten berechnet sich aus

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\tau'}{\sigma'} = \frac{(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{tg} \alpha}{\sigma_y + \sigma_x \operatorname{tg}^2 \alpha} . \tag{119}$$

Den größtmöglichen Wert von β erhält man bei irgend einer Neigung α des Schrägschnittes, die aus der Bedingung

$$\frac{\partial \operatorname{tg} \beta}{\partial \operatorname{tg} \alpha} = (\sigma_x - \sigma_y) \frac{\sigma_y + \sigma_x \operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \sigma_x \operatorname{tg}^2 \alpha}{(\sigma_y + \sigma_x \operatorname{tg}^2 \alpha)^2} = 0$$

zu berechnen ist. Das gibt

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \pm \sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_x}} , \tag{120}$$

wenn α_0 denjenigen Winkel α darstellt, für welchen β seinen Größtwert erlangt. Die Gl. (120) besagt, daß es zwei symmetrisch zur Schrägschnitt-Senkrechten liegende Winkel gibt, die obige Bedingung erfüllen. Der positive oder negative Größtwert β_0 ist durch verbinden der Gl. (119) mit der Gl. (120) zu ermitteln. Man erhält daraus

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_x}} - \sqrt{\frac{\sigma_x}{\sigma_y}} \right) . \tag{121}$$

Größer als der *Reibungswinkel zwischen Erde und Erde* darf der Winkel β_0 nicht werden. Denn sonst würde ein *Gleiten oder Abrutschen* der im Schrägschnitte lagernden Erdteilchen eintreten müssen (**51**, a). Durch den Winkel β_0 kann man also auch die Lage *zweier Gleitflächen* bestimmen, von denen die eine dem *tätigen*, die andere dem *ruhenden Erddrucke* σ_y im Punkte *m* entsprechen muß.

Setzt man in Gl. (121)

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \operatorname{tg} \varphi = f ,$$

wobei f die *Reibungszahl* bedeutet, so erhält man daraus das gesuchte Verhältnis zwischen σ_x und σ_y mit

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 2f^2 + 1 \pm 2f\sqrt{f^2+1}. \tag{122}$$

Darin muß man für den Grenzwert des tätigen Erddruckes, weil dieser der *kleinste* ist, das negative Zeichen nehmen. Für den ruhenden Erddruck gilt das positive Zeichen.

Der Reibungswinkel für trockenen Sand darf zu 35° angenommen werden. Das gibt $f = 0{,}700$ und

$$\sigma_x = 0{,}27\,\sigma_y.$$

Um eine einfache Regel für die Lage der Gleitflächen zu erhalten, braucht man nur Gl. (120) und Gl. (121) miteinander zu verbinden:

$$\operatorname{tg}\beta_0 = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha_0 - 1}{2\operatorname{tg}\alpha_0} = -\operatorname{cotg} 2\alpha_0. \tag{123}$$

Es ist nun beim tätigen Erddruck

$$\sigma_x < \sigma_y$$

oder

$$\operatorname{tg}\alpha_0 > 1,$$

d. h. α_0 ist größer als 45° und $2\alpha_0$ ein stumpfer Winkel. Danach folgt aus der Gl. (123)

$$2\alpha_0 = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

oder

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}, \tag{124}$$

in Worten: *Die Gleitflächen sind unter* 45 *Grad* + *dem halben Reibungswinkel gegen die Wagerechte, oder gegen die Richtung der kleinern Hauptspannung* σ_x, *geneigt*[1].

b. Anwendbarkeit der Theorie auf die Berechnung von Stützmauern. Das Verdienst, Betrachtungen über den Druck im Innern einer Erdmasse angestellt zu haben, gebührt SCHEFFLER[2]. Ihm folgte RANKINE[3], dessen Untersuchungen lange unbeachtet blieben, bis ziemlich gleichzeitig (1869—1871) zwei französische und zwei deutsche

[1] FÖPPL. Vorlesungen über techn. Mechanik. III. Band. Festigkeitslehre. S. 446.

[2] SCHEFFLER. Über den Druck im Innern einer Erdmasse. Crelles Journal der Baukunst. 1851.

[3] RANKINE. On the stability of loose earth. Phil. Transactions of the London Royal Society. 1856—57.

Arbeiten über den gleichen Gegenstand erschienen, deren Verfasser Lévy[1], Considère[2], Winkler[3] und Mohr[4] waren. Seitdem ist die Theorie des Erddruckes im unbegrenzten Erdreich vielseitig gefördert worden. Trotzdem aber ist ihre Anwendung auf die Berechnung der Stützmauern von praktischen Erfolgen nicht begleitet gewesen. Sie hat dabei in manchen Punkten ganz versagt, so daß das von Coulomb und Poncelet begründete Berechnungsverfahren bis heute das herrschende geblieben ist.

Die Schwierigkeiten bei der Anwendung der neuen Theorie auf die Berechnung von Stützmauern liegen hauptsächlich darin, daß beim Hinzutreten der Mauer die physikalischen Verhältnisse in dem Erdreich unmittelbar hinter der Mauer nicht ohne weiteres mehr so vorausgesetzt werden dürfen, wie das (unter a) geschehen konnte. Die Anwendung des neuen Verfahrens führt deshalb in einigen Fällen zu offenbaren Widersprüchen oder Unrichtigkeiten. Es liegt auch wohl auf der Hand, daß eine zutreffende Berechnung von Stützmauern nicht eher aufgestellt werden kann, bis es gelungen ist, die physikalische Natur der Hinterfüllungserde durch Versuche schärfer festzustellen, als es bisher geschehen ist. Dabei wird es notwendig werden, auch die im Erdreich unter einem gewissen Spannungszustande eintretenden *Formänderungen* zu berücksichtigen. Eine von solchen Gesichtspunkten ausgehende neue Theorie des Erddruckes hat Boussinesq[5] aufgestellt. Dieser betrachtet die sandförmigen Massen als auf der Grenze zwischen den flüssigen und festen Körpern stehend und stellt die Erddrücke als Funktionen der Formänderungen der kleinsten Erdteile dar. Bislang fehlen aber noch Versuche, deren Ergebnisse die Richtigkeit und Anwendbarkeit der Theorie von Boussinesq bestätigen könnten. Jedenfalls steht fest, daß die bislang vorliegenden Versuchsergebnisse nicht ausreichen, um dem Ingenieur einen sichern Einblick in die statischen Vorgänge zu verschaffen, die sich bei dem Druck des Erdreiches hinter Stützmauern abspielen[6].

---

[1] Comptes rendus de l'Académie des sciences. 1869—70.

[2] Annales des ponts et chauss. 1870. I.

[3] Zeitschr. des österr. Ing.- und Arch.-Ver. 1871.

[4] Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-Ver. Hannover. 1871.

[5] Boussinesq. Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents comparé à celui des massifs solides et sur la poussée des terres sans cohésion. 1876.

[6] Kötter, a. a. O. S. 135—148.

§ 10. Graphische Berechnung der Stützmauern.

Die nachfolgenden Rechnungen und Darstellungen stützen sich auf die im § 9 gegebenen allgemeinen Darlegungen über die *Lage der Gleitfläche*, sowie auch über *Richtung und Größe des Erddruckes*. Anfangend vom einfachen Falle der geraden Wand- und geraden Erdlinie, werden der Reihe nach die gebräuchlichsten Konstruktionsformen der Stützmauern behandelt werden.

57. Einleitende Bemerkungen.

a. Bedingungen für die Standsicherheit. Jede Stützmauer ruht mit ihrer Sohle *ai* (Fig. 192) auf dem Erdboden, der (abgesehen

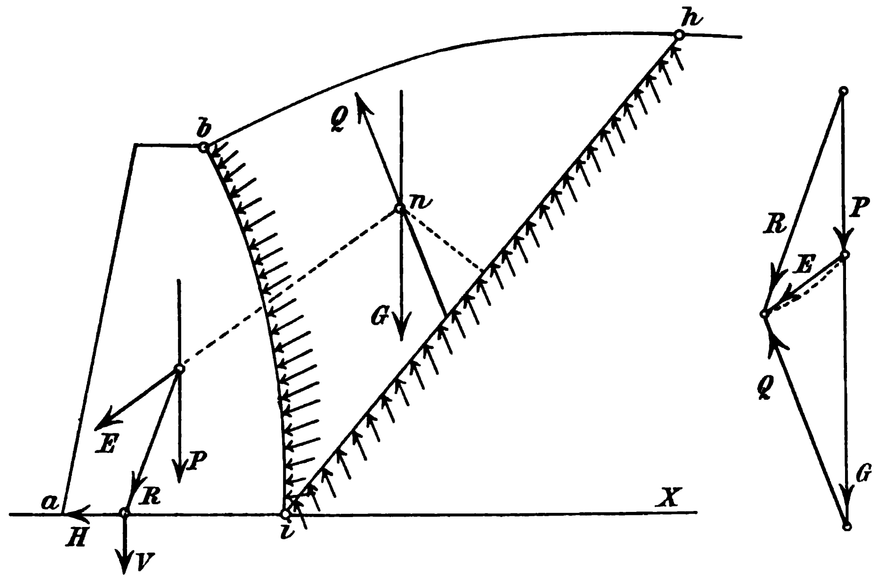


Fig. 192.

von festem Stein- und Felsuntergrunde) einen Druck von etwa 3—6 atm mit ausreichender Sicherheit zu tragen vermag. Diese Spannungsgrenzen liegen weit unterhalb derjenigen Grenzen, die für Baustoffe als zulässig gelten (I. **7**, **12**); die Standsicherheit einer Stützmauer hängt deshalb in erster Linie von der ausreichenden Tragfähigkeit des Untergrundes der Sohle *ai* ab.

Maßgebend für die *Größe des Bodendruckes* ist die Lage und Größe der Mittelkraft *R* aus dem Erddrucke *E* und dem Gewichte *P* der Mauer. *E* ist die Mittelkraft aller *Teil*erddrücke, die in der Fig. 192 (auf der

Wandlinie *ab*) durch Pfeile dargestellt sind. Ihre Richtungen verändern sich gleichmäßig mit den Richtungen der Tangenten ihrer Angriffspunkte. Die Richtung der Teilerddrücke in einer Gleitfläche *ih* ist, wie vorausgesetzt, unveränderlich, also dem Gegendrucke Q parallel. Wird R in seinem Stützpunkte auf der Sohle *ai* in zwei Seitenkräfte zerlegt, von denen die wagerechte (H) in die Sohle fällt und die lotrechte (V) senkrecht dazu steht, so sind die Bedingungen für die Standsicherheit der Mauer wie folgt auszusprechen:

1) Der durch die lotrechte Kraft V erzeugte Bodendruck in der Sohle darf die zulässigen Grenzen nicht überschreiten.
2) Bei frei, ohne Mörtelverbindung oder dergl. in der Sohle gestützter Mauer muß die wagerechte Kraft H kleiner sein, als der durch V erzeugte Reibungswiderstand. Also $H < V \operatorname{tg} \psi$, wenn ψ den Reibungswinkel zwischen Sohle und Mauer vorstellt. Die Sicherheit gegen Verschieben der Mauer soll mindestens $1\frac{1}{2}$- bis 2fach sein.
3) In keinem Punkte des Mauerquerschnittes darf die zulässige Fugenspannung überschritten werden.

Unter gleichen Belastungsverhältnissen gibt es selbstredend mehrere Mauer*querschnitte*, die obige drei Bedingungen erfüllen, also in *statischer* Hinsicht ausreichende Standsicherheit bieten. Dabei kann die *Gestalt* der Querschnitte sehr verschieden ausfallen und rein theoretisch würde derjenige darunter als der beste gelten, der den kleinsten Flächeninhalt besitzt, im allgemeinen also auch die geringsten Herstellungskosten verursachen wird, abgesehen von besonderen Verschiedenheiten in konstruktiver Hinsicht, die hier nicht in Betracht zu ziehen sind. Es wird nicht ohne Nutzen sein, die verschiedenen möglichen Gestalten eines Mauerquerschnittes auch in statischer Beziehung miteinander zu vergleichen. Das ist weiterhin (unter **67**) geschehen.

b. Die physikalische Natur der Hinterfüllung und des Untergrundes[1].

1. Weil die Größe des Erddruckes wesentlich von der Lage der Gleitfläche und dem Gewichte des Gleitprismas abhängt, so ist es in einem vorliegenden Falle von besonderer Wichtigkeit, den *Winkel φ der natürlichen Böschung* sowie auch das Gewicht so genau wie möglich zu bestimmen. Dabei darf angenommen werden, daß die Hinterfüllungserde in der Regel eine *trockene*, durchweg aus Sand, Lehm oder Ton bestehende Masse ist. Sand und Kies (oder dergl.) sind zur Hinterfüllung

[1] Handb. der Hygiene. I. 2. Abt. 3. Heft. SOYKA. Der Boden, S. 30—34.

am besten geeignet, weil sie *Wasser durchlassen*, ohne dabei ihr Einheitsgewicht γ_e zu ändern. Für die Rechnung darf man annehmen:

Gewicht γ_e im trockenen Zustande	t/m³	Reibungswinkel φ Grad
Leichter Sand	1,6	30
Kies	1,8	35
Lehm oder Ton	1,4—1,6	40—45

Für *nassen* Lehm oder Ton erhöht sich das Gewicht auf etwa 1,9 bis 2,0 t/m³, wobei je nach den Umständen der Reibungswinkel sich auf 20° und weiter verkleinern kann. Bei Mauern an Flüssen und Strömen, deren Hinterfüllung Wasser aufnehmen kann, ist aus Gründen der Sicherheit zu raten, auch für Sand und Kies, wegen der Ausfüllung ihres *Poren*inhaltes[1] mit Wasser, ein etwa größeres Gewicht als das angegebene und einen entsprechend kleinern Reibungswinkel in Rechnung zu ziehen. Auch der Reibungswinkel für Sohle und Erdboden ist in solchen Fällen, wegens des unvermeidlichen *Auftriebes* in der Sohle, entsprechend klein anzusetzen. Vergl. das Beispiel unter **66**.

2. Der *Erduntergrund* in der Sohle der Mauer darf als ausreichend elastisch angesehen werden, um seine Spannungen nach dem Elastizitätsgesetz (I. **4**) berechnen zu können. Konstruktiv ist zwischen stark und wenig zusammenpreßbarem Boden zu unterscheiden. Der erstgenannte Boden ist der gefährlichste, weil seine ursprüngliche *ebene* Oberfläche bei wechselnder Lage des Angriffspunktes der Mittelkraft R aller Kräfte (Fig. 191) an den Rändern a und i leicht starke Verdrückungen erleidet, wodurch die Oberfläche eine *Krümmung* annimmt. Bei derart stark zusammenpreßbarem Boden ist es ratsam, die Mittelkraft R möglichst *durch die Mitte der Sohle* verlaufen zu lassen. Denn dann erfahren alle Punkte der Sohle nahezu gleiche Pressungen, so daß zur Bildung der erwähnten Oberflächenkrümmung keine besondere Veranlassung mehr vorliegt. Eine solche Vorsicht ist auch dann noch zu raten, wenn örtlicher Verhältnisse wegen, ein stärkeres Schwanken in der Lage des Angriffspunktes von R nicht zu erwarten steht.

58. Ebene Wand- und beliebige Erdlinie.

a. Die Stellungslinie. Das Erddruckmaß cd (Fig. 189) schließt mit der Senkrechten zur Böschungslinie denselben Winkel β ein, wie die Richtung *der Mittelkraft E der Teilerddrücke* mit der Wagerechten.

---

[1] ENGELS. Zur Berechnung der Bohlwerke. Zentralbl. d. Bauverw. 1903, S. 650.

Die Richtung des Erddruckmaßes wird sowohl bei der Darstellung der Gleitfläche als auch der Größe von E gebraucht. Deshalb hat schon REBHANN ein einfaches Hilfsmittel ersonnen, um die bezeichnete Richtung bequem auftragen zu können. Er benutzt dazu die sog. *Stellungslinie, das ist eine Hilfslinie, die mit einer geraden Wandlinie den Winkel* $(\varphi + \varphi_1)$ *einschließt und deshalb dem Erddruckmaß parallel ist.*

Der Beweis für die Richtigkeit des Satzes von der Stellungslinie kann wie folgt geführt werden (Fig. 193): SS sei die durch den Randpunkt i gelegte Stellungslinie; ib eine Wandlinie, die mit der Lotrechten

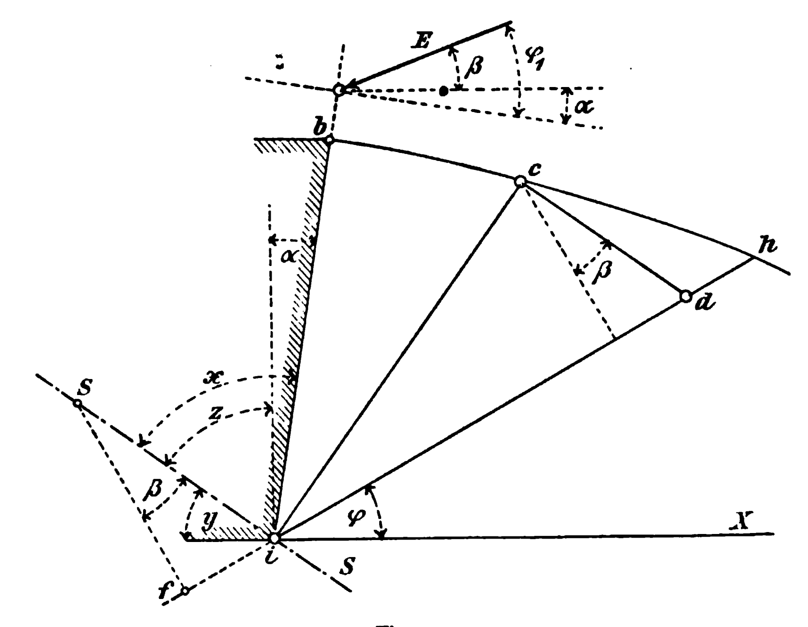


Fig. 193.

den Winkel α bildet. Dann ist zu beweisen, daß der Winkel x, den die zur $\overline{cd}$ parallele SS mit der $\overline{ib}$ einschließt, gleich $\varphi + \varphi_1$ ist, d. h. gleich der Summe der beiden bekannten Reibungswinkel (für Erde auf Erde und Erde auf Wand). Es ist (mit Bezug auf die Fig. 193)

$$x = z + \alpha$$
$$\alpha = \varphi_1 - \beta$$
$$z = 90^\circ - y$$

$$x = 90^\circ - y + \varphi_1 - \beta .$$

Zieht man $\overline{Sf}$ senkrecht zur natürlichen Böschungslinie ih, so folgt

$$90^0 = \beta + y + \varphi,$$

das gibt

$$x = \varphi + \varphi_1.$$

Der Nutzen der Stellungslinie wird weiterhin oft dargetan werden.

b. Lage der Gleitfläche und Größe des Erddruckes. Das hierhier gehörende Verfahren stammt von WINKLER. Die beliebige Erdlinie sei bh (Fig. 194). Man trage zuerst irgendwo die *Stellungslinie* ein, z. B. im Punkte i. Dann nehme man verschiedene Lagen der Gleitfläche an, z. B. ic_1, ic_2, ic_3. Lege durch die Punkte c_1 bis c_3

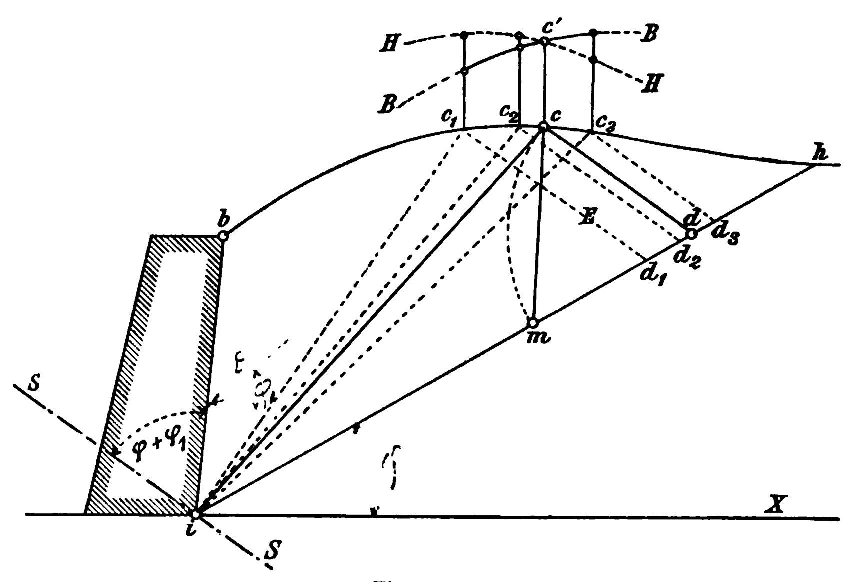


Fig. 194.

Parallen zur Stellungslinie, berechne für *jede* der Gleitflächen die Flächeninhalte der zugehörigen Figuren ibc und cdi nur trage diese als Ordinaten in den betreffenden Fußpunkten c auf. Durch verbinden der Erdpunkte je einer Ordinatenreihe erhält man dann zwei Linien BB und HH, von denen die Ordinaten der ersten den Inhalt der links einer Gleitfläche und die Ordinaten der zweiten das Gewicht der rechts davon liegenden Fläche vorstellt. Lotrecht unter dem Schnittpunkte c' der beiden Linien liegt demnach der Punkt c, in welchem *die wahre Gleitfläche mündet, für welche* (nach **55**, b) *die Fläche* ibc *inhaltsgleich der Fläche* cdi *wird.*

Überträgt man (nach **55**, c) das (der Stellungslinie parallele) Erddruckmaß cd auf die natürliche Böschungslinie ih, macht also

$$\overline{cd} = \overline{dm}\,,$$

so ist cdm das *Druckdreieck* und (nach Gl. 117)

$$E = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\; cdm\,.$$

59. Grundfall der ebenen Wand- und geraden Erdlinie.

a. Die Gleitfläche. Der zu beweisende, zuerst von PONCELET (**53**, a) gefundene Satz von der Gleitfläche lautet hier:

Die vom Erddruckmaß cd auf der natürlichen Böschung abgeschnittene Strecke id ist die mittlere Proportionale zwischen der Böschungslinie ih und der auf dieser von einer durch den obern Wandpunkt b gehenden Stellungslinie abgeschnittenen Strecke if. Das heißt es ist

$$\overline{id}^2 = \overline{ih} \cdot \overline{if}\,. \tag{125}$$

Man ziehe $\overline{dl}$ parallel zur Gleitfläche ic. Dann ist (nach **55**, b)

$$\begin{array}{c} \text{Fl.}\; ibc = \text{Fl.}\; cdi \\ \text{Fl.}\; icl = \text{Fl.}\; cdi \\ \hline \text{Fl.}\; ibc = \text{Fl.}\; icl\,. \end{array}$$

Die letztbezeichneten beiden Flächen haben gleiche Spitze in i und gleiche Höhe. Daraus folgt

$$\overline{bc} = \overline{cl}\,.$$

Ferner ist

$$\frac{\overline{id}}{\overline{ih}} = \frac{\overline{cl}}{\overline{ch}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{ch}} = \frac{\overline{fd}}{\overline{dh}} = \frac{\overline{id} - \overline{if}}{\overline{ih} - \overline{id}}\,.$$

Das gibt

$$\overline{id} \cdot \overline{ih} - \overline{id}^2 = \overline{ih} \cdot \overline{id} - \overline{ih} \cdot \overline{if}$$

oder

$$\overline{id}^2 = \overline{ih} \cdot \overline{if}\,,$$

was zu beweisen war.

Die mittlern Proportionale id kann in verschiedener Weise gefunden werden. Die Fig. 195—196 enthalten zusammen sechs Verfahren ihrer Darstellung, die eines Beweises ihrer Richtigkeit nicht bedürfen.

1) Das *Grundverfahren* (Fig. 195), *bei welchem ein Halbkreis über der Böschungslinie* geschlagen wird: Stellungslinie in b. $\overline{ff_1'}$ senkrecht zur $\overline{ih}$. $\overline{if_1'} = \overline{id}$ und $\overline{cd}$ parallel zur Stellungslinie. Dann ist $\overline{ic}$ die gesuchte Gleitfläche.

2) *Halbkreis über der Wandlinie:* $\overline{ff_2}$ parallel zur Erdlinie bh. $\overline{f_2f_2'}$ senkrecht zur $\overline{bi}$. $\overline{if_2'} = \overline{id_2}$. $\overline{d_2d}$ parallel der Erdlinie usw.

3) *Halbkreis über der Erdlinie*: $\overline{ff_3}$ parallel *zur Wandlinie bi*. $\overline{f_3 f_3'}$ senkrecht zur Erdlinie bh. $\overline{bf_3'} = \overline{bd_3}$. $\overline{d_3 d}$ parallel zur Wandlinie usw.

4) *Tangente an einen Halbkreis über der* $\overline{fh}$ (Fig. 196): Stellungslinie in b. Halbkreis über der $\overline{fh}$. Tangente $\overline{it_4}$ an den Kreis. $\overline{it_4} = \overline{id}$, usw.

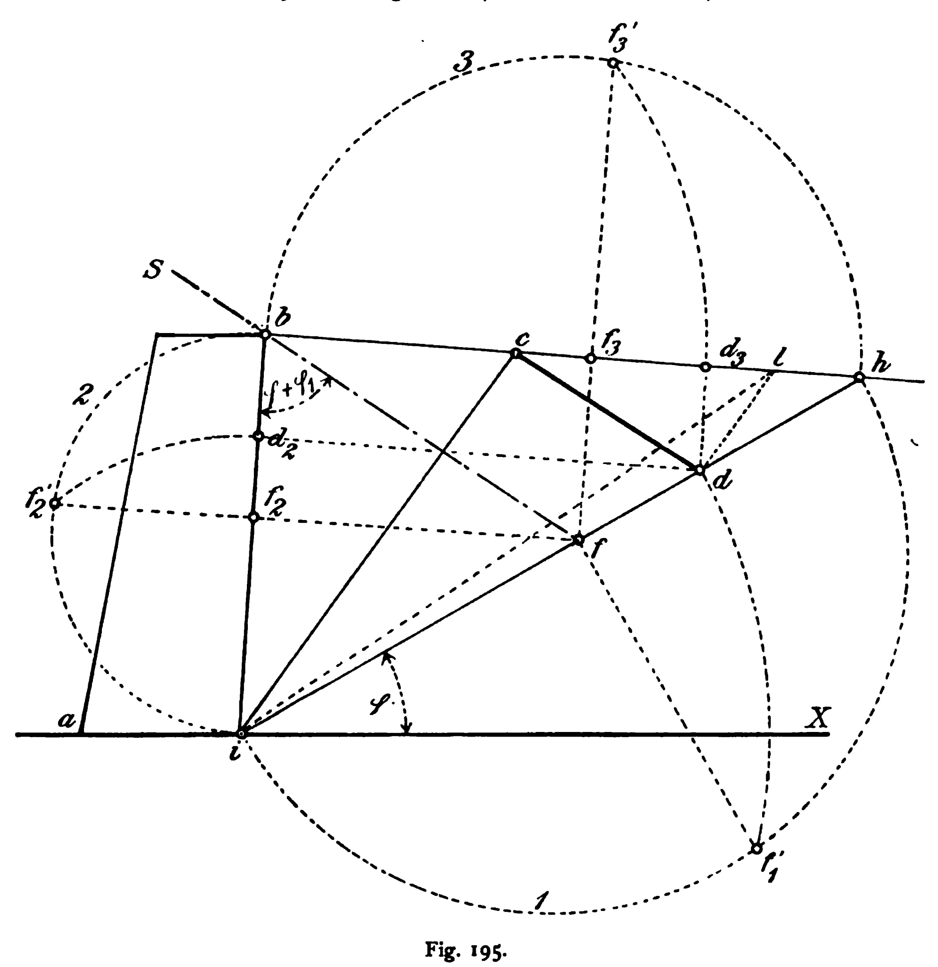


Fig. 195.

5) *Halbkreis über der verlängerten Erdlinie:* Stellungslinie in i schneidet Verlängerung der Erdlinie in h'. Halbkreis über der $\overline{h'h}$. $\overline{bf_5}$ senkrecht zur $\overline{h'h}$. $\overline{h'f_5} = \overline{h'c}$. *Dieses und das 6. Verfahren sind die einzigen, bei welchen der obere Punkt c der Gleitfläche unmittelbar gefunden wird*, d. h. ohne vorherige Bestimmung des Punktes d.

6) *Tangente an einen Halbkreis über der Erdlinie:* Zuerst wie 5). Halbkreis über der $\overline{bh}$. Tangente $\overline{h' t_6}$ an den Kreis. $\overline{h' t_6} = \overline{h' c}$, usw.

b. Die Erdlinie ist der Böschungslinie parallel. Hier liegt der Schnittpunkt h der Erdlinie und Böschungslinie in unendlicher

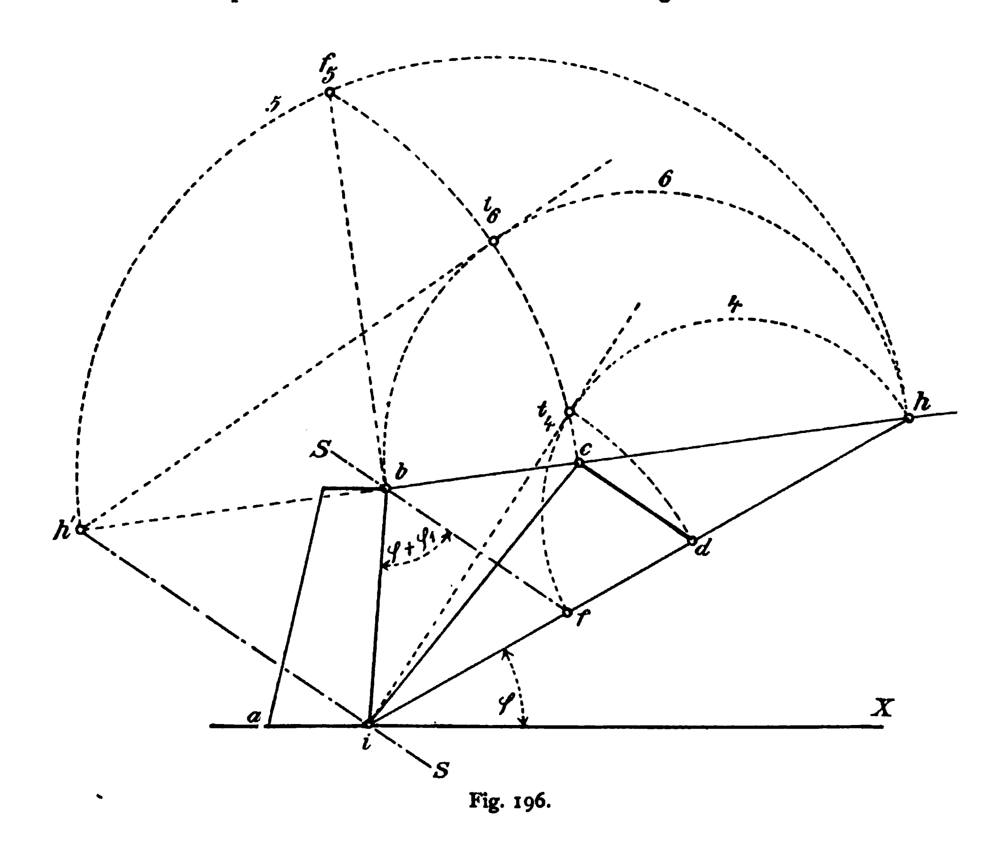


Fig. 196.

Ferne, ebenso der Endpunkt c der Gleitfläche. Das Erddruckmaß cd (Fig. 197) ist unveränderlich. Das *Druckdreieck* kann also für jeden beliebigen Punkt c in bekannter Weise gezeichnet werden.

c. Größe des ruhenden Erddruckes. Hierbei sind φ und φ_1 negativ zu nehmen (Fig. 198). Sonst kann die Darstellung der Gleitfläche cd und des Druckdreiecks cdm, wie bekannt, durchgeführt werden. Es ist dann

$$E_r = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl. } cdm \,.$$

Über die Bedeutung des ruhenden Erddruckes für praktische Aufgaben vergl. unter **54**, b.

60. Ebene Wand und gebrochene Erdlinie.

a. Gleitfläche und Druckdreieck. Welche Gestalt auch die gebrochene Erdlinie hat, der Endpunkt c der Gleitfläche wird in irgend einer ihrer Seite zu liegen kommen. Sobald es feststeht, welche der Seiten dies voraussichtlich sein wird, läuft die Aufgabe die Gleitfläche zu finden darauf hinaus, den gebrochenen Umriß der *vor* ihr liegenden Fläche in ein inhaltsgleiches *Dreieck* zu verwandeln, damit der durch die Gl. (125) ausgedrückte Satz

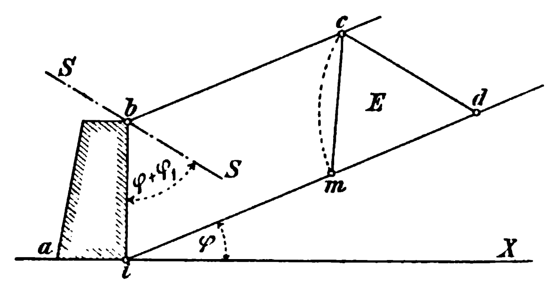


Fig. 197.

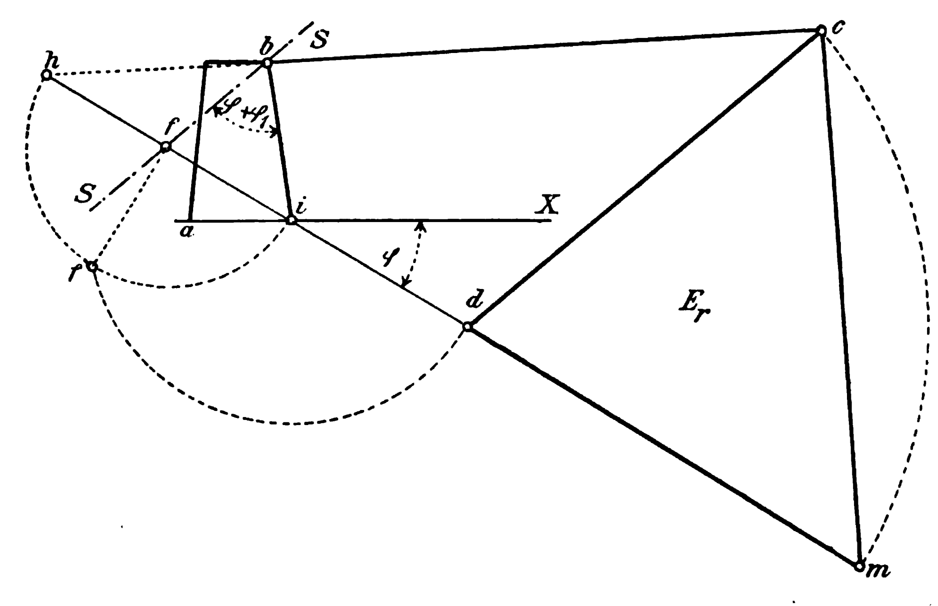


Fig. 198.

(unter **59**, a) zur Geltung kommen kann. Das wird am besten zuerst an einem Beispiele veranschaulicht.

Die Stützmauer in Fig. 199 *begrenzt den Querschnitt eines Straßen- oder Eisenbahndammes. Gleitfläche und Druckdreieck sollen gezeichnet werden.*

Angenommen, der Endpunkt *c* der Gleitfläche falle in die rechtseitige Böschung des Dammes. Dann ist, um auf den Grundfall der geraden Erdlinie zu kommen, der gebrochene Umriß der Fläche *ibuv* in ein Dreieck *isv* zu verwandeln, dessen Spitze *s* in die Verlängerung der Seite *hv* fällt. Das ist (in bekannter Weise) geschehen: Durch den Eckpunkt *u* eine Parallele zur $\overline{bv}$, von welcher die Verlängerung der Wandlinie *ib* in *e* geschnitten wird. Durch *e* eine Parallele zur $\overline{iv}$, welche die Verlängerung der $\overline{hv}$ im gesuchten Punkte *s* trifft. Es ist dann

$$\text{Fl.}\ \triangle isv = \text{Fl.}\ ibuv\,.$$

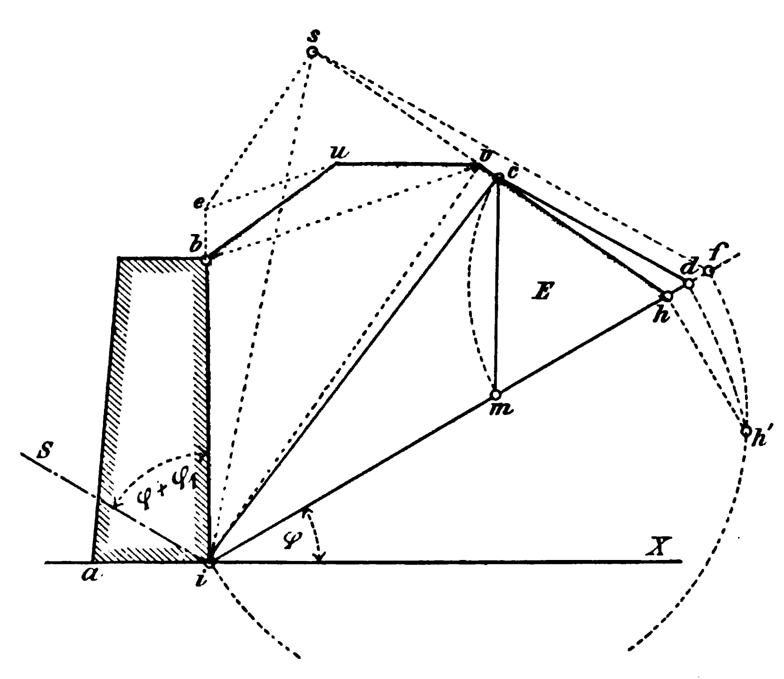


Fig. 199.

Die Flächenteilung kann jetzt nach dem Satze von der Gleitfläche (**59**, a) erfolgen: Parallele zur Stellungslinie durch *s*. Diese trifft die Böschungslinie im Punkte *f*. Bestimmt man also die Strecke *id* als mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten *ih* und *if*, so wird damit der Punkt *d* des Druckdreiecks, und durch Zeichnen des Erddruckmaßes *dc* auch der gesuchte Punkt *c* der Gleitfläche gefunden (Fig. 199). Der Punkt *f* fiel hierbei außerhalb der $\overline{ih}$. Deshalb mußte der Halbkreis über der $\overline{if}$ geschlagen werden.

In der Fig. 200 ist für einen etwas andern Dammquerschnitt als in Fig. 199 nochmals die Gleitfläche gezeichnet. Dabei ist ihr Endpunkt *c* in die Seite *uv* zu liegen gekommen und der Halbkreis mußte über der Böschungslinie *ih* geschlagen werden.

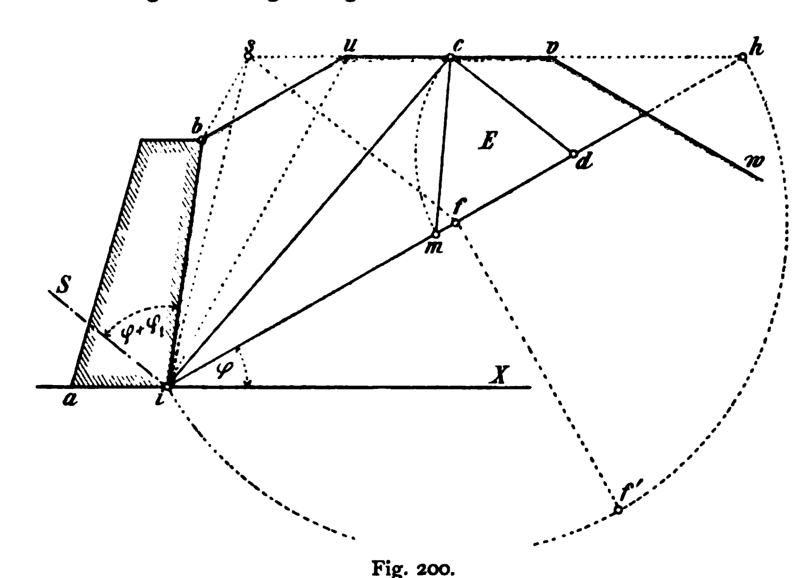


Fig. 200.

Wie schon (unter **53**, a) bemerkt wurde, rührt das erste Verfahren zur Darstellung der Gleitfläche für ebene Wand und gebrochene Erdlinie von PONCELET her. SAINT-GUILHELM[1] bewies später, daß das Verfahren auch dann noch anwendbar bleibt, wenn zufällig der Endpunkt *c* mit einer Ecke der gebrochenen Erdlinie zusammenfällt. Denn in diesem Sonderfalle ist es gleich, welche der beiden die bezeichnete Ecke bildenden Seiten der Erdlinie man zur Flächenverwandlung heranzieht.

Schließlich ist noch zu bemerken, daß bei sehr unregelmäßiger Vieleckgestalt der Erdlinie das von WINKLER angegebene Probierverfahren (**58**, b) am bequemsten ist.

b. Gleitfläche für einen Brechpunkt der Erdlinie.

1. Das hierher gehörige Darstellungsverfahren hat zuerst HOLZHEY[2] angegeben. Es ist von besonderer Wichtigkeit, wenn zwischen der

[1] DE SAINT-GUILHELM. Mémoire sur la poussée des terres avec ou sans surcharge. Ann. des ponts et chauss. 1858. I. S. 319—350.

[2] HOLZHEY. Beitrag zur Theorie des Erddruckes und graphische Bestimmung der Futtermauern. 1871. Sonderabdruck aus »Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- u. Ingenieurwesens«.

Mauerkrone und dem Brechpunkte p *Überlasten* irgend welcher Art liegen, die man in *gleichwertige Erdflächen* verwandeln kann, derart, daß für jede durch p verlaufende Gleitfläche $p i_1$ (Fig. 201) das Gleitprisma als ein Dreieck $i_1 s p$ erscheint. Die Gleitfläche für den Brechpunkt p findet man dann nach folgendem Verfahren:

Man ziehe durch den gegebenen Brechpunkt zwei Parallele, die eine zur Stellungslinie und die andere zur Böschungslinie. Die Wandlinie oder deren Verlängerung werden von der ersten Parallelen im Punkte n, von der zweiten im Punkte e getroffen. Bezeichnet dann i_1 den Fußpunkt der Gleitfläche, so ist *die Strecke $e i_1$ gleich der mittlern Proportionalen zwischen den Abschnitten $e s$ und $e n$ der Wandlinienrichtung.*

Daraus folgt das graphische Verfahren: Je nachdem der Punkt n *über* oder *unter* dem Punkte s liegt, schlage man einen Halbkreis über der $\overline{en}$ oder $\overline{es}$. In s oder n errichte man zur Wandlinie eine Senkrechte. Wenn diese den Kreis im Punkte s' schneidet, so ist

$$(\overline{es'})^2 = \overline{en} \cdot \overline{es}.$$

Macht man also

$$\overline{es'} = \overline{ei_1},$$

so ist

$$(\overline{ei_1})^2 = \overline{en} \cdot \overline{es}. \qquad (126)$$

Für den Beweis der Richtigkeit des obigen Verfahrens ziehe man durch den Fußpunkt i_1 der Gleitfläche eine Böschungslinie. Diese wird von einer durch s gelegten Stellungslinie und den Verlängerungen der beiden Geraden nc und sc der Reihe nach in den Punkten f, d und k getroffen (Fig. 201). Nach dem Satze von der Gleitfläche für den Grundfall, also nach Gl. (125) ist jetzt anzuschreiben:

$$1) \qquad \overline{i_1 d}^2 = \overline{i_1 f} \cdot \overline{i_1 k},$$

wenn $\overline{sk}$ als die zugehörige gerade Erdlinie betrachtet wird.

Aus 1) folgt

$$\overline{i_1 d}^2 - \overline{i_1 d} \cdot \overline{i_1 k} = \overline{i_1 f} \cdot \overline{i_1 k} - \overline{i_1 d} \cdot \overline{i_1 k}$$

oder

$$\overline{i_1 d}(\overline{i_1 d} - \overline{i_1 k}) = \overline{i_1 k}(\overline{i_1 f} - \overline{i_1 d}).$$

Daraus erhält man

$$2) \qquad \frac{\overline{i_1 d}}{\overline{i_1 k}} = \frac{\overline{fd}}{\overline{dk}}.$$

Ferner ist wegen Ähnlichkeit der entsprechenden Dreiecke anzuschreiben:

$$\frac{\overline{fd}}{\overline{dk}} = \frac{\overline{sp}}{\overline{pk}} = \frac{\overline{es}}{\overline{ei_1}}.$$

Das gibt in Verbindung mit 2)

$$3)\qquad \frac{\overline{es}}{\overline{ei_1}} = \frac{\overline{i_1 d}}{\overline{i_1 k}}.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $i_1 s f$ und $i_1 n d$ folgt

$$4)\qquad \frac{\overline{i_1 n}}{\overline{i_1 s}} = \frac{\overline{i_1 d}}{\overline{i_1 f}}.$$

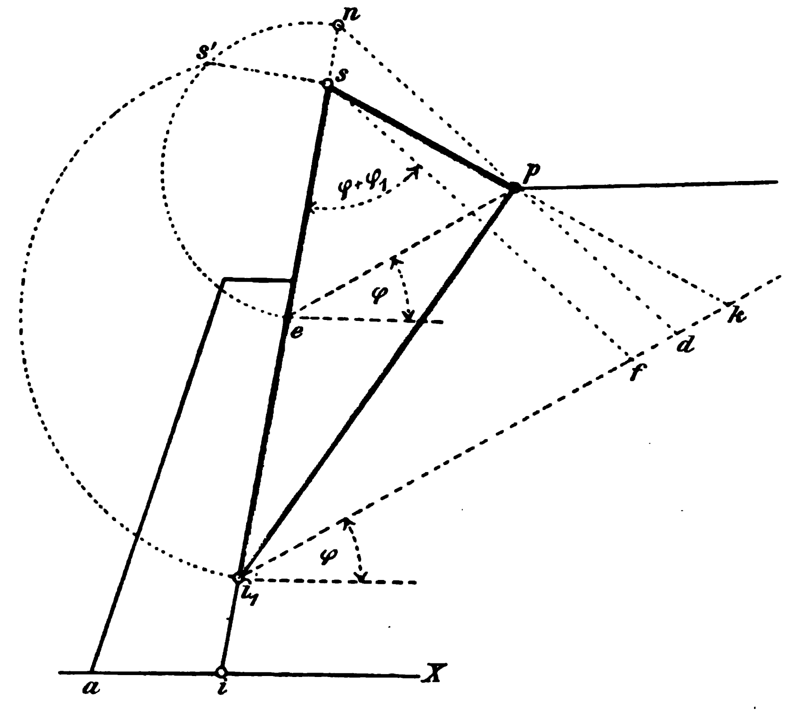


Fig. 201.

3) und 4) miteinander multipliziert gibt

$$\frac{\overline{es} \cdot \overline{i_1 n}}{\overline{ei_1} \cdot \overline{i_1 s}} = \frac{(\overline{i_1 d})^2}{\overline{i_1 k} \cdot \overline{i_1 f}}$$

oder nach 1)

$$\frac{\overline{es}(\overline{ei_1} + \overline{en})}{\overline{ei_1}(\overline{ei_1} + \overline{es})} = 1.$$

Daraus folgt schließlich die Gl. (126) mit

$$(\overline{ei_1})^2 = \overline{en} \cdot \overline{es},$$

was zu beweisen war. *Der bewiesene Satz gilt nicht allein für einen Brechpunkt, sondern für jeden beliebigen Punkt einer geraden oder krummen Erdlinie.* Ist die Erdlinie gerade, so tritt an Stelle des Punktes s der Punkt b der Krone; ist sie krumm, so ist die Fläche ibc in ein flächengleiches Dreieck isc zu verwandeln und der so erhaltene Punkt s ebenso zu benutzen, wie der Punkt s der Fig. 201.

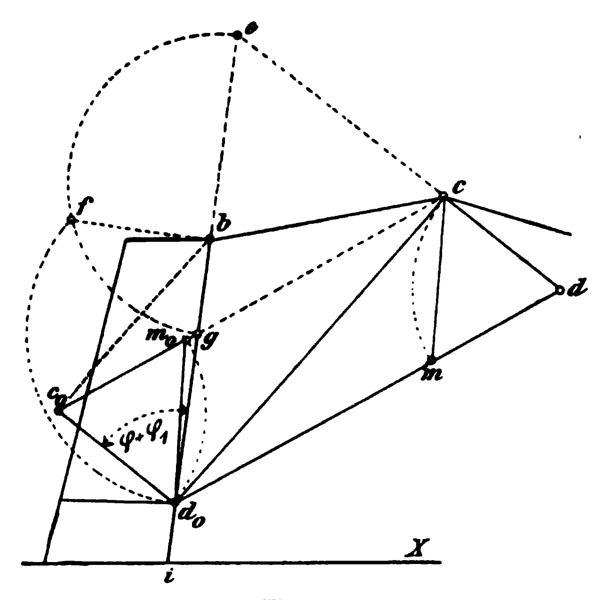


Fig. 202.

2. Ein zweiter Beweis der obigen Darstellung wird durch Fig. 202 gegeben[1]. $\overline{ce}$ und $\overline{cg}$ sind, wie vorher, die beiden Parallelen zur Stellungslinie und Böschungslinie. Man verlängere die $\overline{cg}$ über g hinaus, bis sie eine durch d_0 zur $\overline{cd}$ gelegte Parallele im Punkte c_0 trifft. Dann folgt aus der Gleichheit der Dreiecke cdd_0 und cc_0d_0 die Flächengleichheit der Dreiecke cc_0d_0 und cbd_0, weil nach dem Satze von der Gleitfläche (**55**, b) auch die Dreiecke cdd_0 und cbd_0 flächengleich sein müssen. Es muß demnach die Gerade c_0b der Gleitfläche d_0c parallel sein.

Danach erhält man

$$\frac{\overline{gb}}{\overline{gd_0}} = \frac{\overline{bc_0}}{\overline{cd_0}}.$$

---

[1] Winkler. Über Erddruck auf gebrochene und gekrümmte Wandflächen. Centralbl. d. Bauverw. 1885. S. 74.

Ebenso

$$\frac{\overline{bc_0}}{\overline{cd_0}} = \frac{\overline{gc_0}}{\overline{gc}} = \frac{\overline{gd_0}}{\overline{ge}}.$$

Daraus

$$\frac{\overline{gb}}{\overline{gd_0}} = \frac{\overline{gd_0}}{\overline{ge}}$$

oder

$$(gd_0)^2 = \overline{ge} \cdot \overline{gb},$$

womit der obige Satz von der mittlern Proportionalen (mit etwas anderer Buchstabenbezeichnung) nochmals bewiesen ist. Der Satz gilt (wie gesagt) *für jeden Punkt einer geraden oder krummen Erdlinie*, wenn nur der Punkt b oder s in der Wandlinie oder deren Verlängerung immer so gelegt wird, daß das Gleitprisma ein *Dreieck* ist.

Macht man die Strecken $d_0 c_0$ und $c_0 m_0$ gleich, so stellt das Dreieck $c_0 d_0 m_0$ das *Druckdreieck* vor, weil ja $\overline{c_0 d_0}$ gleich dem Erddruckmaß cd gemacht worden ist.

61. Überlast einer lotrechten Einzelkraft bei ebener Wand.

a. Einfluß der Lage der Einzellast auf die Lage der Gleitfläche. Wenn nach vorigem Verfahren (**60**, b) für irgend einen Punkt c der Erdlinie (diese sei gerade, gebrochen oder krumm) eine Gleitfläche gezeichnet wird (Fig. 203), so ändert sich deren Lage nicht, wenn *außerhalb* der Strecke zwischen dem obern Wandpunkte b und dem Endpunkte c der Gleitfläche noch eine Einzellast P hinzutritt. Dagegen wird eine *innerhalb* der Strecke bc angreifende Einzellast P eine *steilere* Gleitfläche ic_0 hervorrufen, als jene, die ohne Vorhandensein von P erhalten worden war.

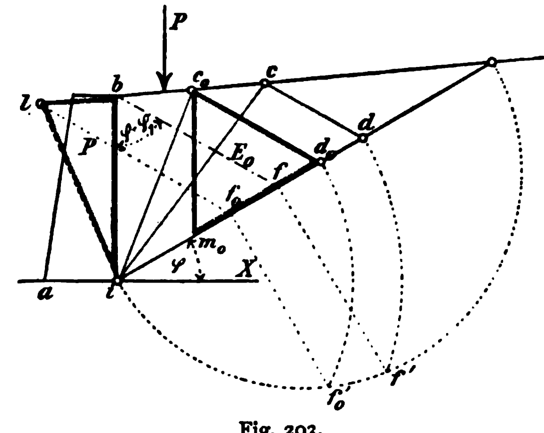


Fig. 203.

Die Lage der unter dem Einflusse der Überlast P eintretenden Gleitfläche ic_0 findet man bei *gerader* Erdlinie am einfachsten, wenn man P in eine gleichwertige *dreieckige* Erdfläche verwandelt und diese über der Wandlinie derart aufträgt, daß ihre Spitze l in die Verlängerung

der Erdlinie fällt (Fig. 203). Die Aufgabe wird dadurch auf den Grundfall (**59**, a) zurückgeführt: Parallele zur Stellungslinie durch l. Halbkreis über der Böschungslinie usw. $c_0 d_0 m_0$ ist *das Druckdreieck für den Erddruck* E_0 *mit Berücksichtigung der Überlast.*

An welcher Stelle zwischen b und c_0 die Einzellast auch liegen möge, *sowohl die Lage der Gleitfläche* $i c_0$ *als auch die Größe des Erddruckes bleibt unverändert.* Auf die Standfestigkeit der Mauer hat die Lage der Einzellast aber insofern Einfluß, als sich gleichzeitig mit der Verschiebung ihres Angriffspunktes auf der Erdlinie auch die Art *ihrer Verteilung über die Wandfläche ändert.* Je näher nämlich die Einzellast zum obern Wandpunkte hinrückt, desto höher in der Wand liegt die Fläche, über welche sie sich verteilt, desto größer wird also ihr Moment in bezug auf den untern Wandpunkt i. Rückt die Einzellast nach der andern Seite hin, über c hinaus, so verschwindet ihr Einfluß ganz. Der Erddruck ist dann allein vom Gewichte des Gleitprismas ibc abhängig. Um die Art der Verteilung des Gewichtes der Einzellast über die Wandfläche bestimmen zu können, wird es notwendig, zwei Gleitflächen für ihren Anfangspunkt zu zeichnen, eine *ohne* und die andere *mit* Berücksichtigung von P.

b. Gleitflächen für den Angriffspunkt der Einzellast. Die Erdlinie wird der Einfachheit halber *gerade* angenommen (Fig. 204). Wäre sie gebrochen oder krumm, so müßte vorerst die über der Geraden bp liegende Erdoberfläche in ein gleichwertiges Erd*dreieck* bpn' verwandelt werden, wobei der Punkt n' in der Wandlinienrichtung liegen müßte. An Stelle des Punktes b träte dann der Punkt n'.

Nach dem (unter **60**, b) beschriebenen Verfahren ist in der Fig. 204 zuerst die Gleitfläche $e_1 p$ ohne Berücksichtigung von P gezeichnet. Darauf wurde das (auf 1 m Tiefe fallende) Gewicht P in ein gleichwertiges Erddreieck bpn verwandelt, dessen Spitze n in die Verlängerung der Wandlinie fällt. Nunmehr kann das erstangewendete Verfahren noch einmal wiederholt werden, wobei an Stelle der Wandlinie — Senkrechten bb' — die Senkrechte ss' tritt. So ergibt sich die zweite Gleitfläche $e_0 p$, die den Einfluß der Einzellast zur Anschauung bringt. Durch die gezeichneten beiden Gleitflächen wird die Wandhöhe bi in drei Strecken (be_1—$e_1 e_0$—$e_0 i$) geteilt: Die obere Strecke ist von P unbeeinflußt; ihr Erddruck E_1 berechnet sich aus dem zur Gleitfläche $e_1 p$ und Böschungslinie $e_1 h_1$ gehörigen Erddruckmaß pd_1. Die mittlere Strecke enthält den Angriffspunkt des von P verursachten Erddruckes E_2, der sich aus der Differenz der beiden Druckdreiecke ergibt, die für je eins der beiden zugehörigen Erddruckmaße pd_1 und pd_0 gezeichnet

werden. Die untere Strecke hat einen Erddruck E_3 aufzunehmen, der aus der Mittelkraft E_0 der drei Teilerddrücke mit

$$E_3 = E_0 - (E_1 + E_2)$$

zu berechnen ist.

Die Gleitfläche für E — die übrigens in der Fig. 204 nicht gezeichnet ist — erhält man durch Festlegen eines Punktes l' in der

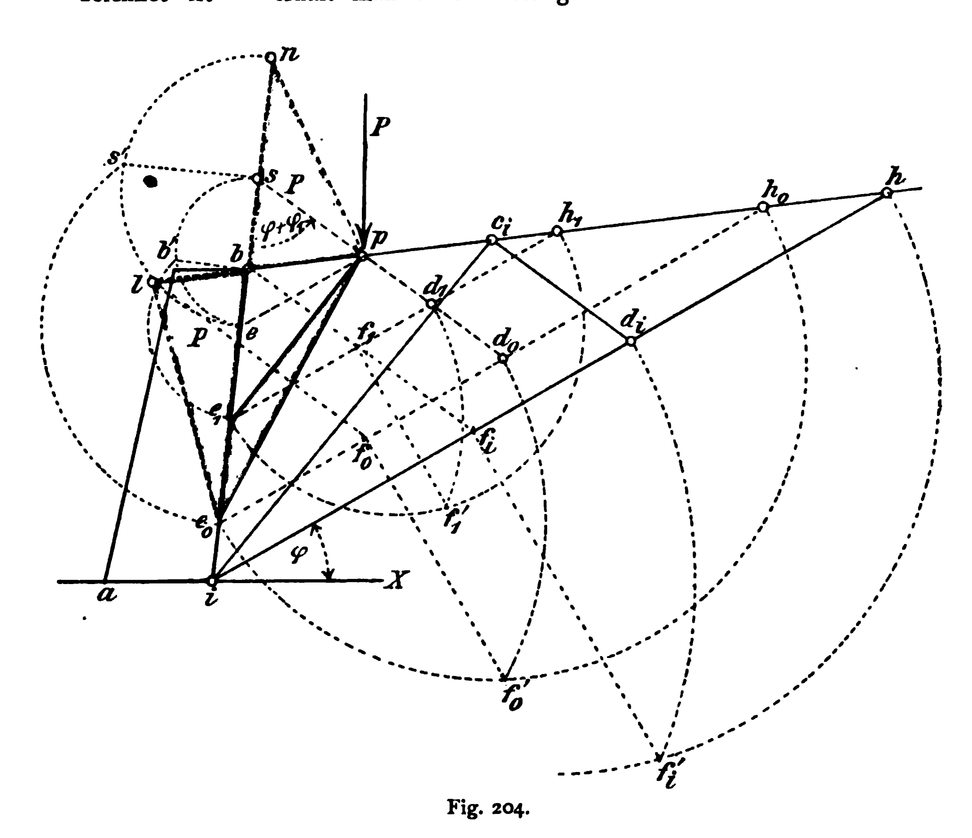


Fig. 204.

Verlängerung der Erdlinie derart, daß das Dreieck ibl' dem Dreiecke bpn flächengleich wird. Eine *Nachprüfung* der Lage der Gleitfläche e_0p ist am einfachsten auszuführen, wenn man über der $\overline{e_0b}$ (wie in der Fig. 204 geschehen) ein dem Dreiecke bpn flächengleiches Dreieck zeichnet, dessen Spitze e in die Erdlinien-Verlängerung fällt: Stellungslinie durch l Halbkreis über der e_0h_0 usw.

ic_i ist die Gleitfläche für den Erddruck E ohne Berücksichtigung der Einzellast.

c. Die Verteilung einer Einzellast über die Erdlinie. Die auf 1 m Tiefe der Wand fallende Einzellast P greift in praktischen Fällen selbstverständlich nicht in einem mathematischen Punkte an. Sie verteilt sich vielmehr der Breite nach immer über eine bestimmte Strecke $p_1 p_2$ der Erdlinie (Fig. 205). Deshalb gehen auch die (unter b) gezeichneten beiden Gleitflächen nie genau von einem mathematischen Punkte p aus (Fig. 204), sondern die obern Endpunkte der Gleitfläche verlaufen durch die Punkte p_1 und p_2. Danach wäre es wohl ausführbar, auch die wirkliche Verteilung der Last P über die Wandfläche $i_1 i_2$ näher zu bestimmen. Die Lösung der Aufgabe gestaltet sich dann nur ein wenig umständlicher, als bei Annahme eines mathematischen Angriffspunktes p. Meistens begnügt man sich bei der Berechnung von Stützmauern aber damit, einzeln stehende Überlasten, wie Lasten von Säulen, Gebäudemauern, schwere Achslasten von Maschinen, Kranen u. dgl. als Lasten im Sinne von Einzellasten (I, **10**), in mathematischen Punkten angreifend, einzuführen. Das Verfahren erscheint insofern berechtigt, als dabei die Standsicherheit der Mauer sich immer *kleiner*, bei gleichem Sicherheitsgrade also ihre Stärke *größer*, ergeben muß, als in Rechnungsfällen, wo Einzellasten über gewisse Strecken verteilt angenommen werden.

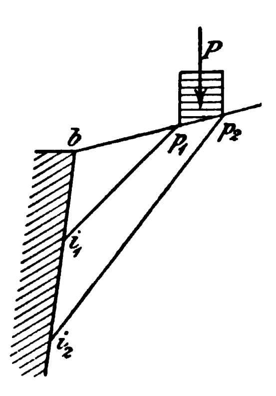


Fig. 205.

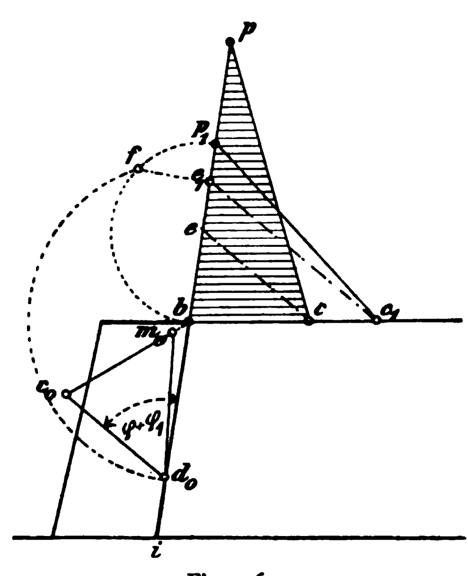


Fig. 206.

d. Die Einzellast liegt unmittelbar neben der Mauerkrone. In Fig. 206 wird das Gewicht der Einzellast P durch das schraffierte Dreieck bcp vorgestellt. Für einen beliebigen andern Punkt c_1 der Erdlinie sei

$$1 \cdot \gamma_e \cdot \text{Fl.} \triangle b c_1 p_1 = 1 \cdot \gamma_e \cdot \text{Fl.} \triangle bcp = P.$$

Daraus folgt

$$\frac{\overline{bp_1}}{\overline{bp}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{bc_1}}.$$

$\overline{ce}$ und $\overline{c_1e_1}$ seien Parallelen zur Stellungslinie. Dann ist auch

$$\frac{\overline{be}}{\overline{be_1}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{bc_1}}.$$

Das gibt

$$\frac{\overline{bp_1}}{\overline{bp}} = \frac{\overline{be}}{\overline{be_1}}$$

oder

$$\overline{bp_1} \cdot \overline{be_1} = \overline{bp} \cdot \overline{be}. \tag{127}$$

Weil $\overline{bc}$ *unendlich klein* angenommen worden ist, so fällt der frühere Endpunkt g einer durch c zur Böschungslinie gelegten Parallelen (Fig. 202) jetzt mit dem Punkte b der Krone zusammen. Der Halbkreis zur Darstellung der mittleren Proportionalen — nach Gl. (126) — ist also über der $\overline{bp}$ zu schlagen, so daß

$$(\overline{bd_0})^2 = \overline{be} \cdot \overline{bp}$$

wird. Dafür darf aber nach Gl. (127)

$$(\overline{bd_0})^2 = \overline{be_1} \cdot \overline{bp_1} \tag{128}$$

angeschrieben werden, d. h. *der Endpunkt d_0 der Gleitfläche bd_0 für P kann für einen beliebig gewählten Punkt c_1 der Erdlinie dargestellt werden, wenn*

$$\gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle bc_1p_1 = P$$

gemacht wird.

Zieht man durch b eine Parallele zur Böschungslinie und durch d_0 eine Stellungslinie, die jene Parallele in c_0 trifft, so ist die Strecke c_0d_0 gleich dem Erddruckmaß. Für

$$\overline{c_0d_0} = \overline{c_0m_0}$$

erhält man für den *Erddruck E_0 aus der Überlast* (nach **60**, b) die Gleichung

$$E_0 = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle c_0d_0m_0. \tag{129}$$

62. Gleitfläche und Druckdreieck bei gleichmäßiger Überlast der geraden Erdlinie und ebener Wand.

a. Ersatz einer Teilbelastung durch eine gleichwertige Erdlinie. Über einem Teile der Erdlinie lagere eine gleichmäßig verteilte, *in Erde von der Höhe h_0 verwandelte* Überlast aus festen oder losen Stoffen, die nicht aus Erde bestehen und in denen das Eintreten etwaiger

Gleitflächen nicht vorausgesetzt werden kann. Die Überlastlinie ist durch die Buchstaben *uvw* bezeichnet (Fig. 207). Eine im Erdreich *ibh* sich bildende Gleitfläche *ie* kann sich also in der Überlast *nicht fortsetzen*, in dieser ist eine *lotrechte* Trennungslinie *ed* vorauszusetzen, so daß auf dem Gleitprisma *ibe* nur der Teil *uvde* der Überlast zur Wirkung gelangen kann. Das Verfahren zur Darstellung einer Gleitfläche *ie* läuft nun im allgemeinen darauf hinaus, *an Stelle des Umrisses uvw der Überlastlinie den gleichwertigen Umriß ukl einer Erdlinie zu setzen, derart daß für jede beliebige Lage einer Gleitfläche ie das Gewicht der Fläche ibuvde gleich dem Gewichte der Fläche ibukge ausfällt.* In diesem Falle kann die

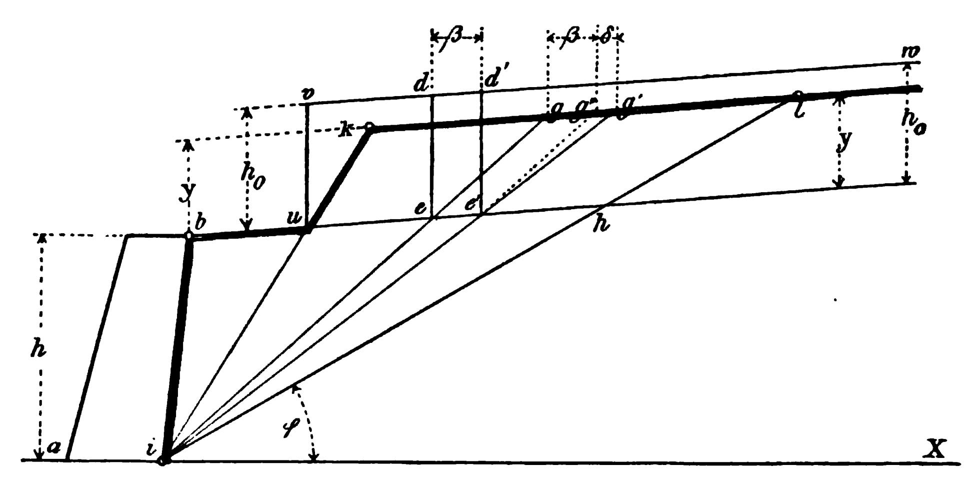


Fig. 207.

mit *gelber* Farbe ausgezeichneteFläche unmittelbar zur Darstellung der wirklichen Gleitfläche dienen (nach **60**, a). Weil die Geraden vw und kl der Erdlinie parallel sind, so kommt es also nur darauf an, die Höhe y der bezeichneten Ersatzfläche zu finden. Das soll rechnerisch und graphisch geschehen.

Neben der Gleitfläche ie, deren Verlängerung die Ersatzlinie kl in g schneidet, wird eine zweite Gleitfläche ie' gelegt und bis zum Punkte g' der Ersatzlinie verlängert. Ferner sei die wagerechte Breite der Überlast zwischen e und e' gleich β. Endlich sei $\overline{e'g''}$ parallel zur $\overline{eg}$ und die wagerechte Projektion der Strecke $g''g = \delta$ (Fig. 207). Dann ist anzuschreiben:

$$\text{Fl. } e d d' e' = \beta \cdot h_0$$

$$\text{Fl. } e g g' e' = \beta \cdot y + \frac{\delta}{2} \cdot y .$$

Bei richtiger Festsetzung der Ersatzlinie kl müssen obige beide Flächen für jede Lage der Gleitflächen gleich groß sein, also

$$y\left(\beta + \frac{\delta}{2}\right) = \beta h_0 .$$

Es verhält sich aber

$$\frac{\delta}{y} = \frac{\beta}{h},$$

wenn h die lotrechte Höhe der Wand ist. Daraus folgt

$$y + \frac{y^2}{2h} = h_0$$

oder

$$(y + h)^2 = h(h + 2h_0) . \qquad (130)$$

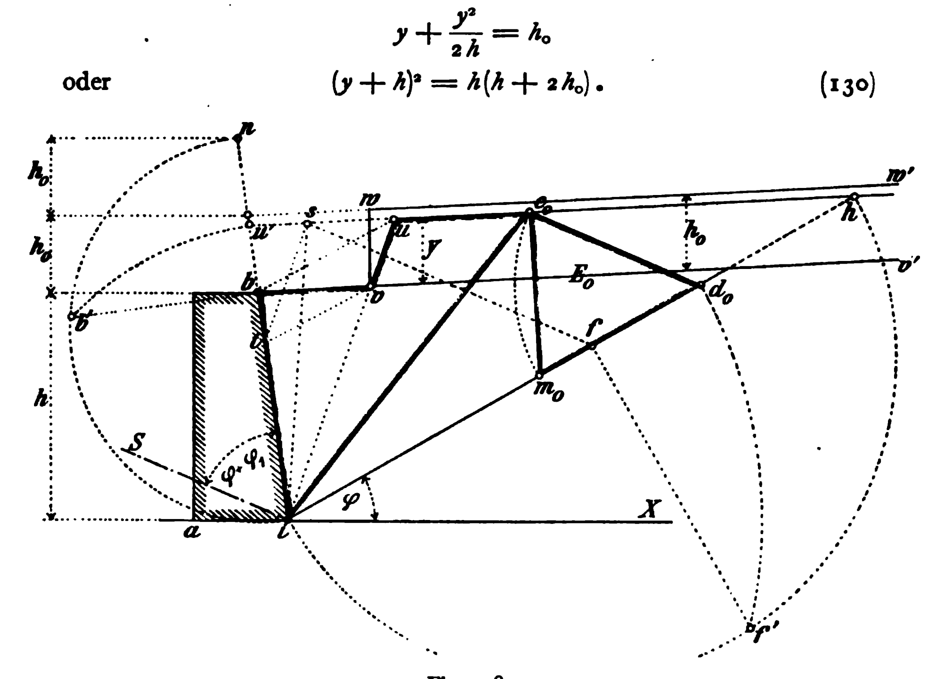


Fig. 208.

Danach ist $y + h$ als mittlere Proportionale der Strecken h und $(h + 2h_0)$ zu zeichnen. Das ist in dem Beispiele der Fig. 208 ausgeführt.

Die Wandlinie ist nach oben bis zum Punkte n verlängert, so daß die lotrechte Projektion der Strecke in gleich $(h + 2h_0)$ wird. Über der $\overline{in}$ ein Halbkreis. Eine Senkrechte zur $\overline{in}$ in b trifft den Kreis in b'. Die Sehne ib' ist also mittlere Proportionale zwischen den Strecken ib und in. Macht man danach $\overline{ib'} = \overline{iu'}$, wo u' ein Punkt der $\overline{in}$ ist, so braucht man, um die Ersatzlinie in einer Höhe y über der Erdlinie zu erhalten, zu dieser durch u' nur eine Parallele zu führen.

Gleitfläche und Druckdreieck bestimmt man nach **60**, a; nachdem vorerst die Fläche $ibvuh$ in die gleichweitige Fläche ish verwandelt worden ist. Der Punkt s findet sich aus

$$\overline{vt} \parallel \overline{ub}$$

und

$$\overline{ts} \parallel \overline{iu},$$

denn dadurch ist

$$\triangle isu = \triangle ibv$$

gemacht worden.

Weiter: Durch s Parallele zur Stellungslinie der Wand ib. Über der Böschungslinie ih der Halbkreis usw. So findet man das *Erddruckmaß* $k_0 d_0$ mit der *Gleitfläche* $i d_0$ und dem *Druckdreieck* $d_0 k_0 m_0$ in bekannter Weise.

b. Ersatz des Überlastprismas einer Teilbelastung durch ein gleichwertiges Dreieck. (Fig. 209.) In der Höhe $2h_0$ über der Erdlinie bh ist ein Punkt n so zu bestimmen, daß die Flächen der beiden Dreiecke inv und ibv einander gleich werden. Das geschieht durch ziehen der

$$\overline{bn} \parallel \overline{iv}.$$

Verbindet man darauf i und n durch eine Gerade, und trifft diese die Erdlinie im Punkte s, so kann durch s eine Parallele zur Stellungslinie der Wand gelegt und für einen Halbkreis über der Böschungslinie ih das Erddruckmaß cd und *die Gleitfläche* ic in bekannter Weise gefunden werden (**60**, a). Der Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens folgt:

Es wurde $\overline{bn} \parallel \overline{iv}$ gemacht, deshalb ist

$$\text{Fl.}\,\triangle inv = \text{Fl.}\,\triangle ibv.$$

Ferner ist

$$\text{Fl.}\,\triangle vnc = \text{Fl.}\; vwc'c$$

dazu

$$\text{Fl.}\,\triangle ivc = \text{Fl.}\,\triangle ivc$$

gibt

$$\text{Fl.}\,\triangle inc = \text{Fl.}\; ibvwc'c. \tag{131}$$

Die Gl. (131) gilt für jede beliebige Lage einer Gleitfläche ic. Die beiden Dreiecke inc und isc haben gleiche Spitze c und gleiche Höhe, verhalten sich also wie ihre Grundlinie:

$$\frac{\text{Fl.}\,\triangle inc}{\text{Fl.}\,\triangle isc} = \frac{\overline{in}}{\overline{is}} = \frac{h + 2h_0}{h}. \tag{132}$$

Trägt man nun (wie bereits früher unter **55**, b, Fig. 189 geschehen) das Krafteck ieg aus Erddruck E_0, Gewicht G_0 des Gleitprismas $ibvwc'c$ und Gegendruck Q_0 der Gleitfläche in i so an, daß die lotrechte Seite eg

das Gewicht des Gleitprismas und $\overline{gg'}$ die Verkleinerung dieses Gewichtes, bei verschwindend kleiner Drehung der Gleitfläche cd in die Lage ck darstellt, so ist weiter anzuschreiben:

$$\frac{\overline{eg}}{\overline{gg'}} = \frac{\gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle inc}{\gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\, icnk} = \frac{\text{Fl.} \triangle inc}{(\text{Fl.} \triangle ick + \text{Fl.}\, cnk)}$$

oder

$$\frac{\overline{eg}}{\overline{gg'}} = \frac{\text{Fl.} \triangle inc}{\text{Fl.} \triangle ick \left(1 + \frac{2 h_0}{h}\right)} = \frac{h \cdot \text{Fl.} \triangle inc}{(h + 2 h_0)\, \text{Fl.} \triangle ick}.$$

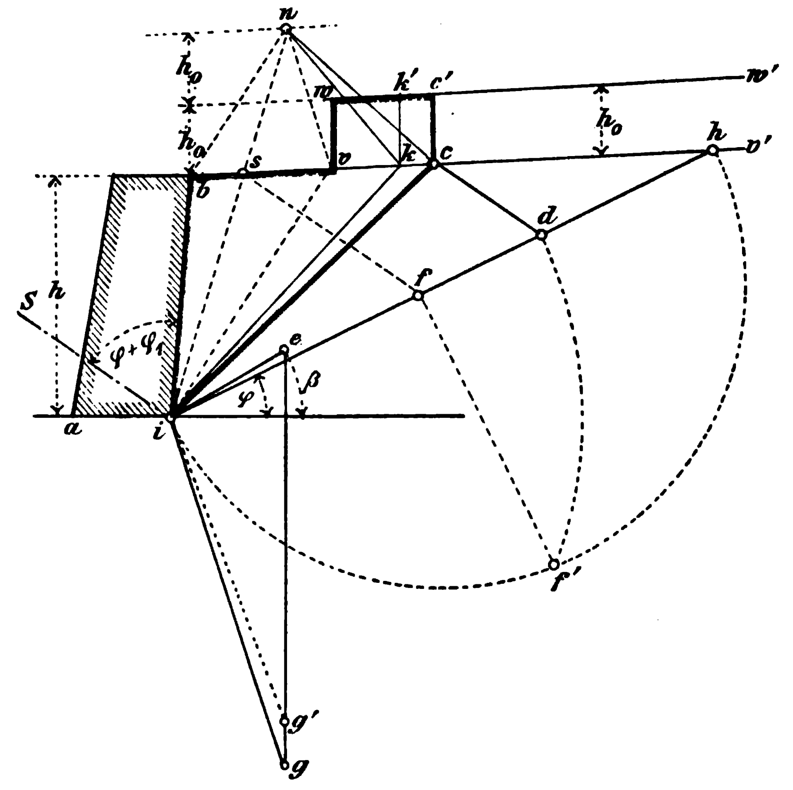


Fig. 209.

Ferner, wenn $\overline{ig} = \overline{ic}$ gemacht worden ist (Fig. 189 unter **55**, b)

$$\frac{\overline{eg}}{\overline{gg'}} = \frac{\text{Fl.} \triangle ieg}{\text{Fl.} \triangle igg'} = \frac{\text{Fl.} \triangle icd}{\text{Fl.} \triangle ick}.$$

Aus den letzten beiden Ausdrücken folgt:

$$\text{Fl.}\ \triangle\, icd = \text{Fl.}\ \triangle\, inc\left(\frac{h}{h+2h_0}\right).$$

Das gibt schließlich in Verbindung mit der Gl. (132)

$$\text{Fl.}\ \triangle\, icd = \text{Fl.}\ \triangle\, isc\,, \tag{133}$$

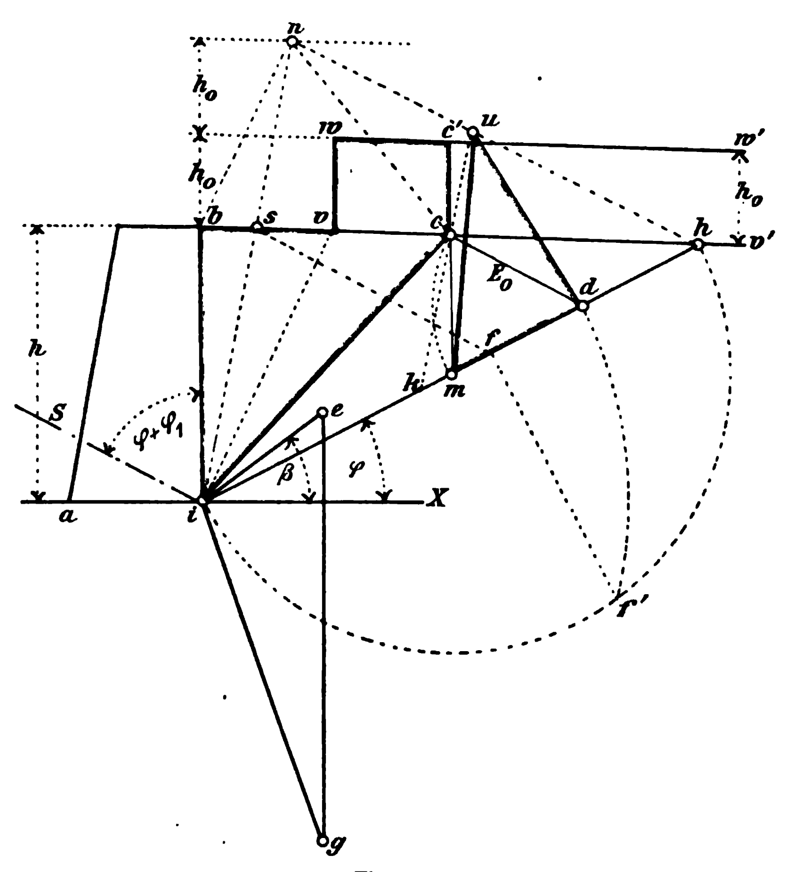


Fig. 210.

d. h. der Punkt s kann in bekannter Weise (**60**, a) dazu benutzt werden, um *die Gleitfläche* ic *aus der Überlast* mit Hilfe der mittlern Proportionalen id der Strecken if und ih darzustellen.

Bei dem vorstehenden Verfahren muß das *Druckdreieck* besonders dargestellt werden. Das ist in Fig. 210 geschehen, worin auch nochmals die Gleitfläche gezeichnet ist, also $\overline{bn} \parallel \overline{iv}$; durch s Parallele sf

zur Stellungslinie, usw. bis der Endpunkt c der Gleitfläche gefunden ist. Darauf folgt die *Darstellung des Druckdreiecks:*

Man verbinde n mit dem Schnittpunkte h der Erd- und Böschungslinie. Ziehe durch c zur $\overline{in}$ eine Parallele, welche die $\overline{nh}$ im Punkte u trifft. Mache $\overline{cd} = \overline{dm}$. Dann ist $\triangle\, udm$ *das Druckdreieck des Erddruckes* E_0 *für die Überlast.* Also:

$$E_0 = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\ \triangle\, udm$$

oder

$$E_0 = \gamma_e \cdot 1 \cdot F_0\,, \tag{134}$$

wenn F_0 *den Inhalt des Druckdreiecks für Überlast* bezeichnet.

Der Beweis für die Richtigkeit der Darstellung ergibt sich in ähnlicher Weise, wie er (unter **55**, c) für beliebige Wand- und Erdlinie gegeben worden ist. Mit Bezug auf die Fig. 210 ist anzuschreiben:

$$\frac{E_0}{G_0} = \frac{\overline{ie}}{\overline{eg}} = \frac{\overline{cd}}{\overline{id}} = \frac{\overline{md}}{\overline{id}} = \frac{\text{Fl.}\ \triangle\, cdm}{\text{Fl.}\ \triangle\, icd} = \frac{\text{Fl.}\ \triangle\, cdm}{\text{Fl.}\ \triangle\, isc}\,.$$

Das gibt mit Bezug auf Gl. (132)

$$E_0 = G_0 \cdot \frac{\text{Fl.}\ \triangle\, cdm}{\text{Fl.}\ inc\left(\dfrac{h}{h + 2h_0}\right)}\,.$$

Es ist aber auch

$$G_0 = 1 \cdot \gamma_e \cdot \text{Fl.}\ inc\,,$$

so daß aus der Verbindung der letzten beiden Ausdrücke

$$E_0 = 1 \cdot \gamma_e \cdot \text{Fl.}\ cdm\left(\frac{h + 2h_0}{h}\right)$$

folgt.

Zieht man jetzt noch die Hilfslinie uc und verlängert sie bis zum Schnittpunkte k in der Böschungslinie, so erhält man für das Verhältnis des Druckdreiecks udm zum $\triangle\, cdm$:

$$\frac{\text{Fl.}\ \triangle\, udm}{\text{Fl.}\ \triangle\, cdm} = \frac{\overline{uk}}{\overline{ck}} = \frac{\overline{ni}}{\overline{si}} = \frac{h + 2h_0}{h}\,,$$

wodurch die Gleichung übergeht in

$$E_0 = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\ \triangle\, udm = \gamma_e \cdot 1 \cdot F_0\,, \tag{135}$$

was zu beweisen war.

c. Vollbelastung. Darunter wird eine gleichmäßig verteilte Überlast verstanden, die bis zum obern Wandpunkte b reicht. Für diesen Fall gelten, wie die Fig. 211 veranschaulicht, die beiden unter a beschriebenen Verfahren ebenfalls.

Der *frühere Punkt* v der Teilbelastung fällt jetzt mit dem Wandpunkte b zusammen. Die *Ersatzlinie* begrenzt danach ein Gleitprisma isc_0, das dem Gleitprisma ibc *ohne Überlast* ähnlich ist. Die Gleitflächen ic und ic_0 für E und E_0 fallen also in einer einzigen Gerade zusammen. Demnach ist anzuschreiben.

$$\frac{E_0}{E} = \frac{(\overline{c_0 d_0})^2}{(\overline{c\,d})^2} = \frac{(\overline{i d_0})^2}{(\overline{i d})^2} = \frac{(h+y)^2}{h^2}\,.$$

Nach Gl. (130) ist aber

$$(h+y)^2 = h(h+2h_0)\,.$$

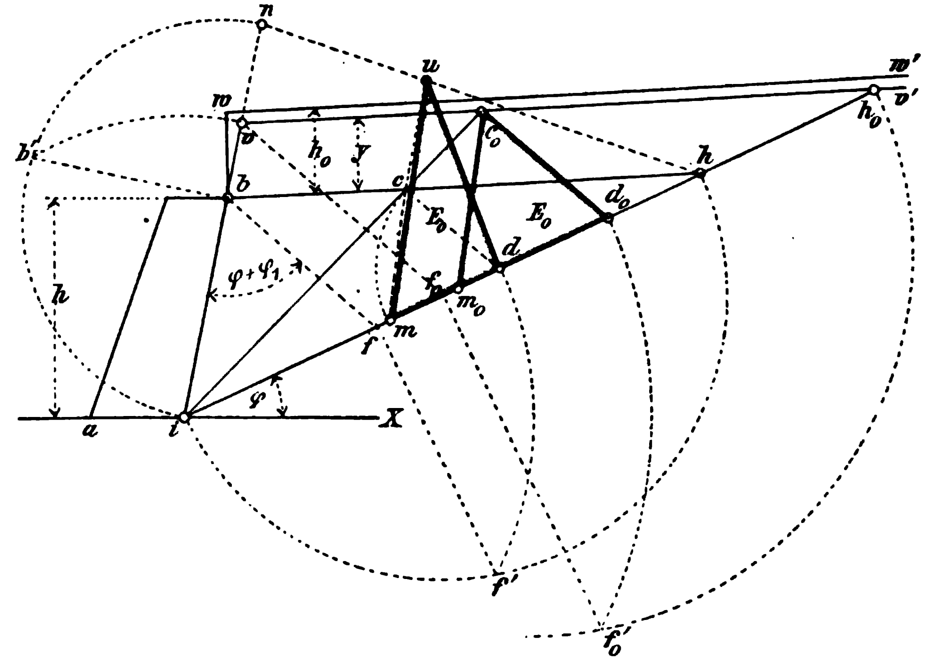


Fig. 211.

Das gibt für *volle* Überlast

$$E_0 = E\left(\frac{h+2h_0}{h}\right). \tag{136}$$

Dasselbe ist natürlich aus der Darstellung des *Ersatzdreiecks* nachzuweisen. Hierbei fällt der Punkt n in die Verlängerung der Wandlinie und anstelle des Punktes s tritt jetzt der Punkt b. Daraus folgt, daß bei *voller* Überlast das $\triangle\, cdm = F$, d. h. gleich dem Druckdreieck für E ist. Mithin darf nach Gl. (134)

$$E_0 = E\left(\frac{h + 2h_0}{h}\right)$$

angeschrieben werden.

Der allein infolge der vollen Überlast verursachte Erddruck $E_ü$ ist mit

$$E_ü = E_0 - E = E\left[\left(\frac{h + 2h_0}{h}\right) - 1\right]$$

anzuschreiben. Das ist

$$E_ü = \left(\frac{2h_0}{h}\right) E. \tag{137}$$

63. Erddruck auf gebrochene und krumme Wandflächen. Bildet die Wandlinie im Querschnitt ein *Vieleck* (Fig. 212), so ist in jeder Ecke ein wagerechter Teilstrich durch Wand und Erde zu ziehen und für die dadurch erhaltenen Teilflächen ist der Erddruck je besonders zu bestimmen. Dabei erfolgt die Darstellung des Erddruckes E_1 der obern Teilfläche so, wie im vorhergehenden für verschiedene Belastungsfälle der ebenen Wand ausführlich beschrieben wurde. Die übrigen Teilerddrücke E_2, E_3, E_4 usw. werden durch ein besonders zu erläuterndes Verfahren ermittelt. Größe und Richtung der Mittelkraft E aller Teilerddrücke finden sich dann aus einem Krafteck (Fig. 212 oben). Bei obiger Teilung durch Wagerechte ist für *krumme* Wandlinien die *Höhe* der einzelnen Teilflächen (1, 2, 3, 4, usw.) *klein* genug zu wählen, damit die zugehörige krumme Strecke der Wandlinie genau genug durch eine Gerade ersetzt werden kann.

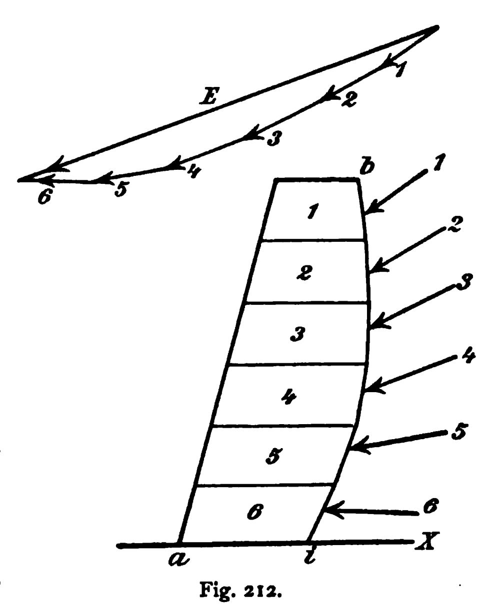


Fig. 212.

a. Gerade Erdlinie ohne Überlast (Fig. 213).

1. Für die obere Teilfläche der Wand ist der Erddruck E_1 in bekannter Weise dargestellt: $i_1 S_1$ ist die dazu benutzte Stellungslinie, $c_1 d_1$ das Erddruckmaß; $c_1 d_1 m_1$ das Druckdreieck. Der Erddruck E_2 auf die untere Teilfläche wird nun *aus dem Kraftecke zu ermitteln sein, das die vorhandenen vier äußern Kräfte, nämlich* E_1, E_2, *der Gegendruck Q der*

Gleitfläche ic und das Gewicht G des zugehörigen Gleitprismas ii_1bc miteinander bilden müssen.

Das Krafteck ist in Fig. 214 gezeichnet. Darin ist

$$G = G_1 + G_2.$$

E_1 kann in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, von denen eine lotrecht ist und die andere *in die Richtung von E_2 fällt.* Bezeichnet man die lotrechte Seitenkraft, die einem bestimmten Teile des Gewichtes G gleich ist, mit g und die andere — in Fig. 214 *punktiert* gezeichnete — Seitenkraft mit E_{1-2}, so muß auch zwischen

$$(E_{1-2} + E_2), \quad Q \text{ und } (G - g)$$

Gleichgewicht stattfinden, *denn diese drei Kräfte bilden in der* Fig. 214 *ein geschlossenes Kraftdreieck.* Um E_2 zu finden, bestimme man danach zuerst die Mittelkraft der beiden *gleichgerichteten* Erddrücke E_{1-2} und E_2. Bezeichnet man diese mit E', so ist

$$\left.\begin{aligned} E' &= E_{1-2} + E_2 \text{ oder} \\ E_2 &= E' - E_{1-2}. \end{aligned}\right\} \qquad (138)$$

E' findet man aus einem Gleitprisma, dessen Gewicht um g kleiner ist als das Prisma ii_1bc und das im Querschnitte ein Dreieck isc bildet, dessen Spitze s in der Erdlinie liegen muß.

2. Die Bestimmung von E_2 läuft nach obigem im wesentlichen auf eine entsprechende Verwandlung des Prismaquerschnittes ii_1bc hinaus. Das im vorliegenden Falle in Abzug zu bringende Gewicht g kann einfach graphisch dargestellt werden, wenn man, neben dem (zur Stellunglinie der ersten Teilfläche parallelen) Erddruckmaße c_1d_1, durch c_1 noch eine Parallele c_1e_1 zur Stellungslinie iS der untern Teilfläche zieht. Denn dann ist

$$\gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle c_1d_1e_1 = g. \qquad (139)$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Gleichung folgt aus der Gleichheit der beiden schraffierten Dreiecke in den Fig. 213—214. Das Kraftdreieck der Fig. 214 — aus E_1, G_1 und Q_1 gebildet — ist (nach **55**, b) dem Dreieck $i_1c_1d_1$ ähnlich oder es ist kongruent, wenn (wie in der Fig. 214 geschehen ist) die Strecke Q_1 des Kraftecks gleich der Prismaseite i_1c_1 gemacht wird. Die beiden schraffierten Dreiecke sind kongruent, weil die Richtungen von E_1 und E_{1-2} den gleichen Winkel einschließen, wie die beiden Stellungslinien i_1S_1 und iS. Es verhält sich also

$$\frac{g}{G_1} = \frac{\overline{e_1d_1}}{\overline{i_1d_1}} = \frac{\gamma_e \cdot 1 \cdot \overline{e_1d_1} \cdot \dfrac{\lambda}{2}}{\gamma_e \cdot 1 \cdot i_1d_1 \cdot \dfrac{\lambda}{2}},$$

wenn λ die Höhe des Dreiecks $c_1 d_1 i_1$ bedeutet. Das gibt

$$g = G\left(\frac{\gamma \cdot 1 \cdot \overline{e_1 d_1} \cdot \frac{\lambda}{2}}{G}\right)$$

oder

$$g = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle c_1 d_1 e_1 ,$$

wie es die Gl. (139) aussagt.

3. Um das gesuchte Dreieck isc zu finden, ist demnach von der Fläche $i i_1 b c_1$ das Dreieck $c_1 d_1 e_1$ abzuziehen. Das kann geometrisch in

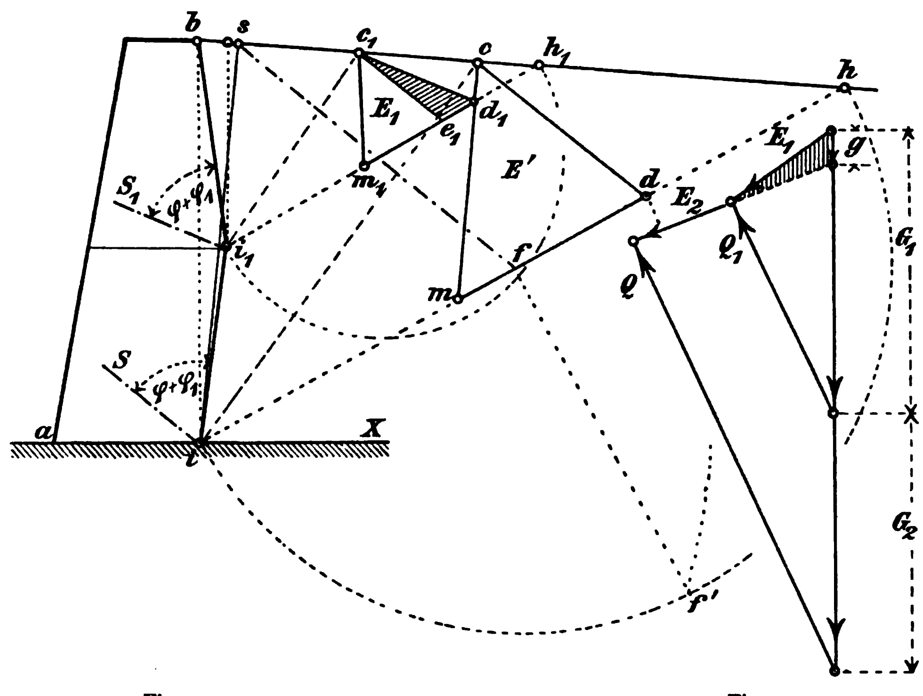


Fig. 213. Fig. 214.

irgend einer Weise ausgeführt werden. Wie dies *rein graphisch* am einfachsten geschieht, veranschaulicht die Fig. 215. Darin ist das schraffierte Dreieck $c_1 d_1 e_1$, dessen Seiten $c_1 d_1$ und $c_1 e_1$ den betreffenden Stellungslinien $i_1 S_1$ und iS parallel sind, in ein flächengleiches Dreieck $i_1 b k$ verwandelt, das in der Fig. 215 ebenfalls schraffiert ist. Die Verwandlung geschah wie folgt:

$$\overline{e_1 e'} \parallel \overline{d_1 c_1} \quad \text{und} \quad \overline{d_1 d'} \parallel \overline{b h_1}$$

$$\overline{e' n} \parallel \overline{i_1 b} .$$

Zieht man darauf die Gerade $n c_1$, so ist

$$\text{Fl.} \triangle e' c_1 n = \text{Fl.} \triangle c_1 d_1 e_1 ,$$

weil $\text{Fl.} \triangle c_1 d_1 e_1 = \text{Fl.} \triangle e' c_1 d_1 = \text{Fl.} \triangle e' c_1 n .$

Macht man jetzt

$$\overline{d'l} \parallel \overline{n c_1} ,$$

so ist auch

$$\text{Fl.} \triangle d' b l = \text{Fl.} \triangle c_1 d_1 e_1 .$$

Schließlich folgt

$$\overline{d'k} \parallel i_1 l ,$$

womit

$$\text{Fl.} \triangle d' k l = \text{Fl.} \triangle d' k i_1 ,$$

also auch

$$\text{Fl.} \triangle i_1 b k = \text{Fl.} \triangle c_1 d_1 e_1 \qquad (140)$$

gemacht wird.

4. Nachdem mit Hilfe der in Fig. 215 angegebenen, oder in anderer Weise, die Prismafläche $i i_1 b h$ (Fig. 213) in ein um die Fläche des Dreiecks $c_1 d_1 e_1$ kleineres Dreieck $i s h$ verwandelt worden ist, wird s als Ausgangspunkt einer Parallelen zur untern Stellungslinie iS benutzt, der Halbkreis über der $\overline{ih}$ geschlagen und (in bekannter Weise) die Gleitfläche ic gefunden. Macht man dann $\overline{cd} = \overline{dm_1}$, so ist *cdm das Druckdreieck für E'*, der Mittelkraft von E_2 und E_{1-2}, wobei E_{1-2} durch die *punktierte* Seite des schraffierten Dreiecks der Fig. 214 dargestellt wird. Damit ist, nach Gl. (138), auch E_2 aus

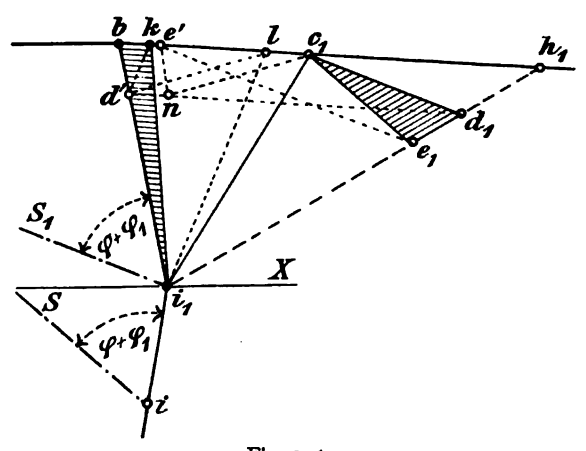


Fig. 215.

$$E_2 = E' - E_{1-2}$$

gefunden.

5. In der Fig. 213 ist der *Kantenwinkel* der in der Mauerecke i_1 zusammenstoßenden Wandflächen $b i_1$ und $i_1 i$ *kleiner als* 180°. Daraus ergibt sich der Winkel β, den die Erddruckrichtung mit der Wagerechten einschließt, für E_1 größer als für E_2. Ist aber, wie es in der Fig. 216 veranschaulicht ist, der bezeichnete Kantenwinkel *größer als* 180°,

so tritt das Umgekehrte ein: der Winkel β ist für E_2 größer als für E_1. Deshalb wird auch die zur untern Stellungslinie parallel laufende Seite $c_1 e_1$ des schraffierten Dreiecks $c_1 d_1 e_1$ *oberhalb des Erddruckmaßes* $c_1 d_1$ *zu liegen kommen* (Fig. 216). Die Fläche des schraffierten Dreiecks $c_1 d_1 e_1$ ist demnach bei der (unter 4) gezeigten Flächenverwandlung nicht *negativ* sondern *positiv* zu nehmen, so daß der Punkt s in Fig. 216 links von b fällt, während er in Fig. 213 rechts von b zu liegen gekommen ist.

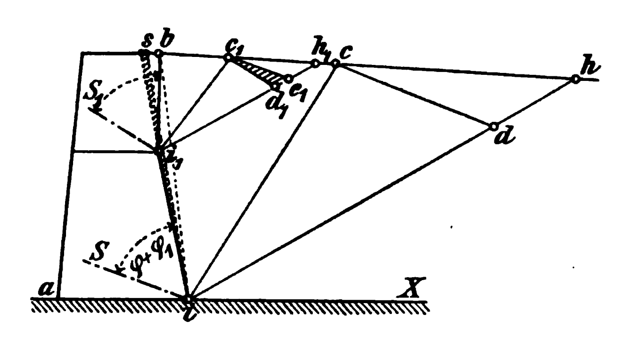


Fig. 216.

Nach obigem erscheint in *konstruktiver* Hinsicht eine *ein*springende Ecke i_1 der Wandfläche vorteilhafter als eine *aus*springende, wie sie Fig. 216 zeigt. Denn unter sonst gleichen Verhältnissen erhält man für eine Stützmauer größere Erddrücke bei ausspringenden als bei einspringenden Ecken (Fig. 213). Hierüber ist auch **65**, b zu vergleichen.

b. Überlast einer lotrechten Einzelkraft.

1. Wenn der Angriffspunkt c der Einzellast P (Fig. 217) nahe der Krone bei b liegt und deshalb der Fußpunkt der für c gezeichneten Gleitfläche noch in der *obern* Wandlinie $b i_1$ zu liegen kommt, so liegt ein Fall vor, wie er (unter (**61**, b) behandelt worden ist. Wir nehmen aber an, c läge so weit von b, daß die Fußpunkte der beiden für c zu zeichnenden Gleitflächen in die untere Wandlinie $i_1 i$ fallen.

Ohne Berücksichtigung von P erhält man die Gleitfläche $c d_1$ wie folgt: Man bestimme zuerst (nach dem unter a. angegebenen Verfahren) das Gewicht g (Gl. 139), um welches das Erdprisma $i i_1 b c$ zu verringern ist, wenn man den Erddruck E_2 für die untere Wandfläche $i_1 i$ (Fig. 217) darstellen will. Dies Gewicht ist für jeden beliebigen in der untern Wandlinie liegenden Fußpunkt *unveränderlich* und es kann (nach a. 3) durch ein Dreieck $i_1 b k$ veranschaulicht werden, so daß

$$g = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle i b_1 k$$

ist.

Verwandelt man nun das Dreieck $i_1 k c$ in ein flächengleiches Dreieck $i_1 e_1 c$, dessen Spitze e_1 in die Verlängerung der untern Wandlinie fällt, — was durch $k e_1 \parallel i_1 c$ erfolgt — so kann die frühere (unter **60**, b in

Fig. 201) gegebene Darstellung der Gleitfläche, unter Anwendung der Gl. (126) angewendet werden: Durch c die Parallelen ce und cg zur Stellungs- und Böschungslinie; über der $\overline{ge}$ ein Halbkreis; Senkrechte e_1f_1 zur Wandlinienrichtung ie; Sehne f_1g gleich der Strecke gd_1 der Wandlinie. Dann ist cd_1 die gesuchte Gleitfläche *ohne* Überlast. Der Erddruck E' dazu findet sich aus dem zugehörigem Druckdreieck (nach Fig. 213 oder Fig. 202).

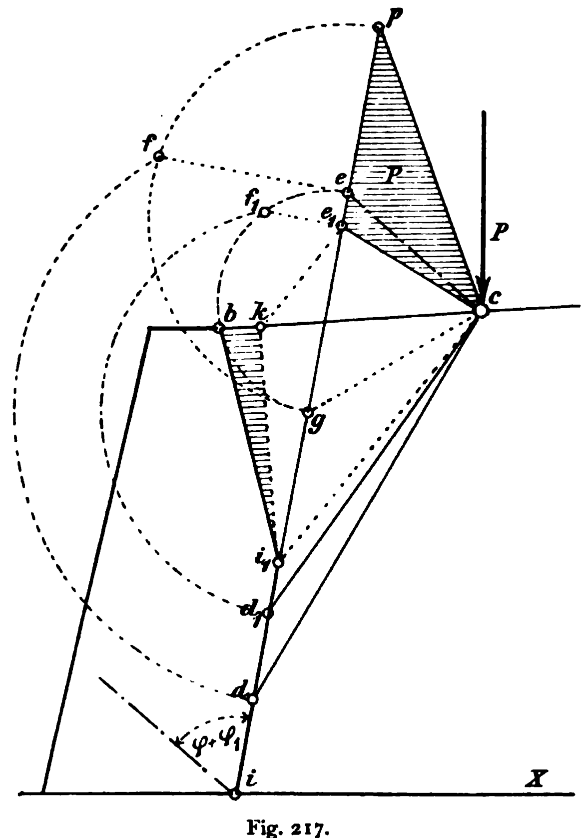


Fig. 217.

Trägt man das schraffierte Dreieck ce_1p auf der $\overline{ce_1}$ so an, daß die $\overline{e_1p}$ in der Wandlinienrichtung ie zu liegen kommt, so läßt sich auch die Gleitfläche *mit* der Überlast zeichnen: Halbkreis über der $\overline{gp}$; Senkrechte ef zur $\overline{ip}$; Sehne fg gleich der Strecke gd zu machen. Somit erhält man in der $\overline{cd}$ die zweite Gleitfläche, die den Einfluß der Einzellast veranschaulicht (vergl. Fig. 204, unter **61**, b).

2. Die Darstellung der beiden Gleitflächen ist auch für *gebrochene oder krumme Erdlinien* leicht auszuführen, wenn man das zugehörige Prisma i_1bc zuvor in ein flächengleiches Dreieck i_1sc verwandelt, dessen Spitze s in der Richung der *obern* Wandlinie liegt. Man zeichnet dann an Stelle des schraffierten Dreiecks i_1bk der Fig. 217 ein Dreieck i_1sh, so daß

$$\gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\, i_1sh = g$$

wird. Schließlich folgt $ke_1 \parallel i_1c$ usw. wie unter 1.

64. Der Angriffspunkt des Erddruckes. Bisher beschränkten sich unsere Darstellungen nur auf die Ermittelung der *Lage der Gleitfläche* und der *Größe des Erddruckes* für die vorkommenden wichtigsten Konstruktionsfälle der ebenen, gebrochenen und krummen Wand, bei gerader oder beliebig gestalteter Erdlinie *mit und ohne Überlasten*. Um aber, wie die Fig. 192 (unter 57, a) erklärt, Lage und Größe der die Mauersohle ai treffenden Mittelkraft R (aus dem Erddrucke E und dem Mauergewichte P) feststellen zu können, ist es notwendig, für die oben genannten Konstruktionsfälle auch noch die *Angriffspunkte* der Teilerddrücke (Fig. 212) oder den Angriffspunkt ihrer Mittelkraft E in der Wand aufzusuchen.

a. Ebene Wand und gerade Erdlinie.

1. Das einfachste Verfahren besteht hier darin, daß man *das Druckdreieck für E in ein flächengleiches Dreieck ibk verwandelt*, dessen Grundlinie ik entweder parallel der Erddruckrichtung oder in beliebiger Richtung (Fig. 218) oder wagerecht (Fig. 219) aufgetragen wird, wobei der Maßstab für die Flächeneinheit beliebig gewählt werden kann. Also

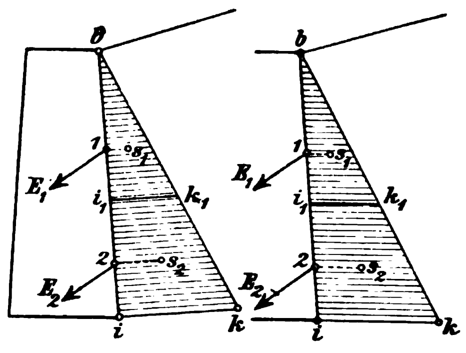


Fig. 218. Fig. 219.

$$E = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\, \triangle ibk. \tag{141}$$

Weil alle Druckdreiecke einander ähnlich sind, veranschaulicht z. B. die materielle Linie i_1k_1 den unendlich kleinen Teilerddruck ΔE im Punkte i_1. Jede der Grundlinie des Dreiecks ibk parallele materielle Linie kann deshalb als Maß des auf der betreffenden Wandstelle wirkenden Teilerddruckes ΔE angesehen werden. Der Angriffspunkt 1 eines

Teilerddruckes E_1 auf die Wandstrecke bi_1 liegt danach in einer durch den Schwerpunkt s_1 des Dreiecks bi_1k_1 führenden Parallelen zur Grundlinie ik. Ebenso liegt der Angriffspunkt 2 des Erddruckes E_2 auf die Wandstrecke i_1i in einer durch den Schwerpunkt s_2 des Trapezes i_1k_1ki zur $\overline{ik}$ gezogenen Parallelen. Aus alledem folgt der Satz:

Der auf eine ebene Wand wirkende Erddruck nimmt seine Richtung durch den obern Punkt des untern Drittels der Wandlinie.

2. An Stelle der *Teil*erddrücke $\varDelta E$ kann man auch in jedem Wandpunkte i_1 diejenige Ordinate i_1i_1' (Fig. 220) auftragen, welche dem Erddrucke auf die ebene Wandstrecke bi_1 entspricht. Man erhält dann für eine Wandlinie bi an Stelle des Dreiecks bik der Fig. 218 — 219 eine *Parabel* $bi_1'i'$, deren Scheitel in b liegt. Das ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, daß die Erddrücke ihrer Größe nach sich verhalten wie die *Quadrate* einer Seite der zugehörigen ähnlichen Druckdreiecke, oder was dasselbe ist, *wie die Quadrate der zugehörigen Wandhöhen* (vergl. auch unter **62**, c).

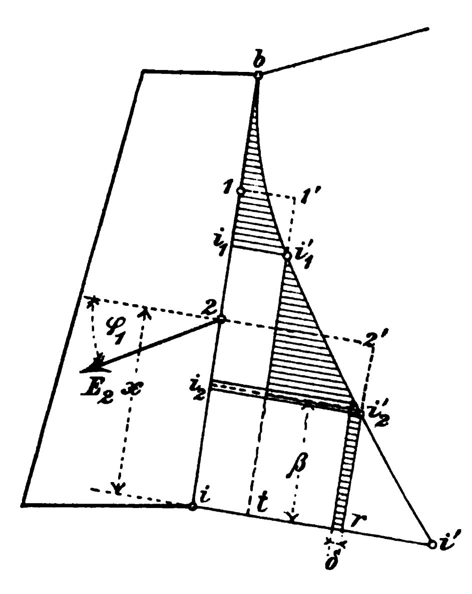


Fig. 220.

3. Der Angriffspunkt 2 des Erddruckes E_2 auf die beliebige Wandfläche i_1i_2 läßt sich wie folgt bestimmen: Die Ordinaten i_1i_1' und i_2i_2' entsprechen der Größe der auf die zugehörigen Wandlinien bi_1 und bi_2 fallenden Gesamterddrücke (Fig. 220). Unmittelbar über der Ordinate i_2i_2' denke man sich in unendlich kleinem Abstande eine Nachbarordinate gezogen. Der Unterschied ihrer beiden Längen sei δ. Dann ist

$$\varDelta E_2 = \delta\,.$$

Bezeichnet man den Abstand zwischen dem Angriffspunkte von $\varDelta E_2$ und i mit β, so ist das statische Moment von $\varDelta E_2$ in Bezug auf den untern Randpunkt i mit

$$\varDelta E_2 \cdot \cos\varphi_1 \cdot \beta = \delta \cdot \beta \cdot \cos\varphi_1$$

anzuschreiben, weil die *in* die Wandrichtung fallende Seitenkraft von $\varDelta E_2$ kein Moment erzeugt. Das statische Moment M aller Teilerddrücke auf die Wandstrecke $i_1 i_2$ beträgt danach

$$M = \sum \delta \cdot \beta \cdot \cos \varphi_1 .$$

Die Summierung aller Teilflächen $\delta \cdot \beta$ gibt graphisch die Fläche $(t i_1' i_2' r)$. Das Moment M der Teilerddrücke ist gleich dem Momente von E_2. Das gibt (mit Bezug auf die Fig. 220)

$$M = E_2 x \cdot \cos \varphi_1 = \cos \varphi_1 \cdot \text{Fl.}\ (t i_1' i_2' r) .$$

Ferner ist graphisch

$$E_2 = i_2 i_2' - i_1 i_1' .$$

Daraus folgt

$$x = \frac{\text{Fl.}\ (t i_1' i_2' r)}{\overline{i_2 i_2'} - \overline{i_1 i_1'}} ,$$

d. h. *um den in der Höhe x über i liegenden Angriffspunkt 2 des Erddruckes E_2 zu erhalten, verwandele man die Fläche $(t i_1' i_2' r)$ in ein Rechteck der Höhe x und der Breite $\overline{tr}$.* Das geschieht durch Verwandelung der *schraffierten* Fläche,

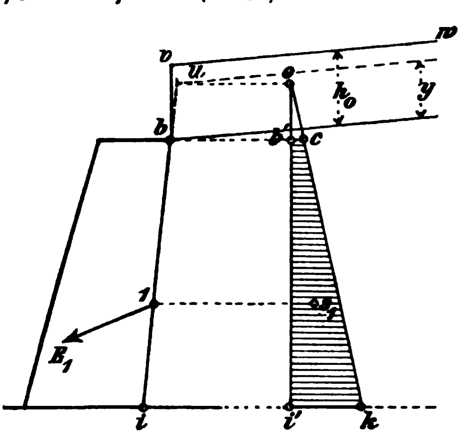


Fig. 221.

die von der krummen Linie $i_1' i_2'$ und der Ordinatenstrecke

$$\overline{i_2 i_2'} - \overline{i_1 i_1'} = \overline{tr}$$

begrenzt wird. Anwendungen dieses Verfahrens auf die Bestimmung der Angriffspunkte *in gebrochenen Wandflächen* vergl. unter **66**, a.

Weil nun der Inhalt einer Parabelfläche $b i_1 i_1'$, wenn die Parabel die Wandlinie in b berührt, gleich ein Drittel des Rechteckes aus Grundlinie $i_1 i_1'$ und Höhe $b i_1$ ist, so ist damit der (unter 1) ausgesprochene Satz von der Lage des Angriffspunktes noch einmal bewiesen.

b. Ebene Wand, und gerade Erdlinie mit gleichmäßig verteilter Überlast.

1. Eine *Vollbelastung* von der Höhe h_0 verwandele man (nach **62**, a und c) in eine gleichwertige Erdlast von der Höhe y (Fig. 221). Zeichne an irgend einer Stelle ein Dreieck $o i' k$, dessen Inhalt dem Druckdreieck mit Überlast gleich ist. Also

$$\gamma_e \cdot \text{Fl.}\ \triangle\, o i' k = E_0 .$$

Die Spitze o dieses Dreiecks muß in einer durch u führenden Wagerechten zu liegen kommen, wobei u in den Schnitt der Ersatzlinie und der Wandlinienrichtung fällt (vergl. Fig. 208).

In der Höhe $\overline{ob'} = \frac{1}{3}y$ über der Krone b wirkt ein Erddruck E_b, der mit

$$E_b = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\, \triangle\, ob'c$$

angeschrieben werden kann. $\overline{b'c}$ liegt in der durch b geführten Wagerechten. Der Erddruck E_1 auf die Wandfläche bi greift (nach a) im Punkte 1 an, der in die durch den Schwerpunkt s_1 des Trapezes $b'cki'$ verlaufenden Wagerechte fällt. Dabei ist

$$E_1 = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\, b'cki'\,.$$

Die Richtung von E_0 verläuft durch den obern Punkt des untern Drittels der Wandstrecke ui. Damit sind Lage und Größe der Erddrücke E_b, E_1 und ihre Mittelkraft E_0 derart festgelegt, daß die *Mittelkraftlinie* (I. **58**) gezeichnet werden kann.

Wollte man in vorliegendem Falle das zweite Verfahren, bei welchem in jedem Teilpunkte der Wandlinie der gesamte darüberliegende Erddruck als Ordinate aufgetragen wird, anwenden (Fig. 220), so würde man an Stelle des Dreiecks $oi'k$ eine *Parabel*fläche erhalten.

2. Eine *Teilbelastung* verwandele man wie vor in eine gleichwertige Erdlast von der Höhe y (Fig. 208). Darauf bestimme man die Gleitfläche vi_1 für den Anfangspunkt v der Teillast (nach **61**, b), sowie das zugehörige Druckdreieck für E_1. Sodann verwandele man die Fläche ii_1vuh in ein Dreieck is_2h. Dessen in der Wagerechten uh liegende Spitze s_2 diene zur Darstellung der zweiten, durch i verlaufenden Gleitfläche und des Erddruckes E_2. Eine Nachprüfung muß ergeben

$$E_0 = E_1 + E_2\,.$$

Die Angriffspunkte für E_1 und E_2 sind dann, wie vor (unter 1) beschrieben zu finden.

c. Gebrochene Wand und gerade Erdlinie. Für die obere Wandstrecke bi_1 wird der Erddruck E_1 und sein Angriffspunkt 1 so gefunden, wie (unter a) angegeben (Fig. 222). Also

$$E_1 = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\, b'i_1'k_1\,.$$

Jetzt berechnet man (nach **63**, a, Fig. 213—214) den Erddruck E', der mit dem Gegendruck Q und dem Erdgewichte $G - g$ ein Kraftdreieck bildet (Fig. 214). Das geschieht unter Verwandeln der Prismafläche ii_1bc vom Gewichte G (Fig. 213) in ein Dreieck isc, das um g

weniger wiegt. In Fig. 222 ist diese Verwandelung wie folgt ausgeführt: $i_1 r \parallel ib$. Dann ist Fl. ii_1bc = Fl. $\triangle irc$. Der Punkt s findet sich also, wenn

$$\gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle irc - g = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\ isc$$

gemacht wird. In der durch s führenden Wagerechten liegt die Spitze o eines Dreiecks $oi'k$, dessen Inhalt aus

$$\gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle oi'k = E'$$

zu bestimmen sein wird. Der über der $\overline{i_1 k_1}$ liegende Teil dieses Dreiecks veranschaulicht die Größe *der in die Richtung von* E' fallenden

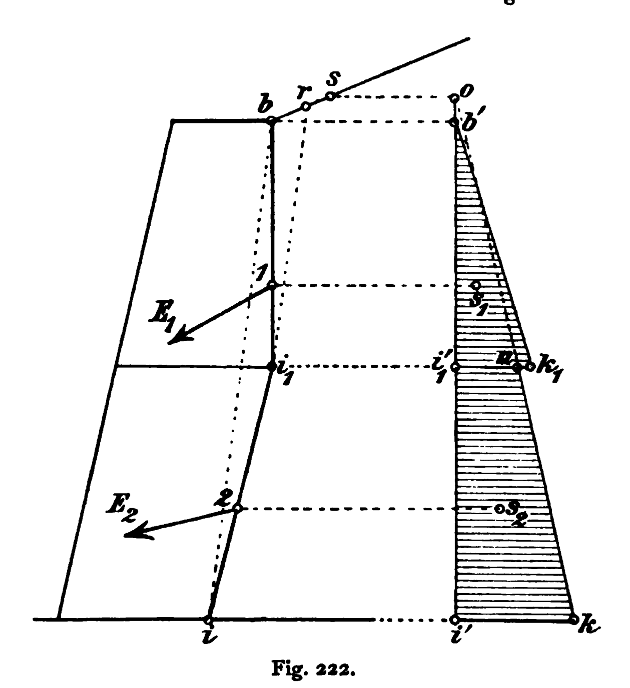


Fig. 222.

Seitenkraft von E_1. Diese wurde (unter **63**, a) E_{1-2} genannt. Demnach ist

$$\gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle oi_1 n = E_{1-2}.$$

Nach Gl. (138) ist aber

$$E_2 = E' - E_{1-2}$$

d. h. *graphisch*

$$\gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.}\ i_1' nki' = E_2.$$

Der Angriffspunkt 2 *von* E_2 *liegt also in der durch den Schwerpunkt des Trapezes* $i_1' nki'$ *führenden Wagerechten. Die Richtung von* E_1 *verläuft durch den obern Punkt des untern Drittels der Wandstrecke* bi_1.

Man vergleiche die Beispiele unter **66**.

65. Schlußbetrachtungen.

a. Fugenspannungen und Bodendruck. Nachdem im vorigen die Lage der Gleitfläche, Größe der Erddrücke, sowie auch deren Angriffspunkte für die wichtigsten Konstruktionsfälle ermittelt worden sind, bedarf es, um die Standsicherheit der Stützmauer beurteilen zu können, nur noch der Darstellung einer *Mittelkraftlinie* (I. **58**). Diese wird bekanntlich mit Hilfe eines aus den äußern Kräften — Erddrücken und Mauergewichten — gebildeten Kraftecks zwischen den Kraftrichtungen gezeichnet und sobald das geschehen ist, liefert ihr Schnitt mit einer beliebigen Fuge den sog. *Stützpunkt* (I. **64**, b), von dessen Lage sowohl die Randspannungen, als auch die Spannungsverteilung in der Fuge abhängig ist. Wie bereits (unter **57**, a) dargelegt wurde, ist namentlich die Lage des Stützpunktes der Sohlenfuge für die Beurteilung der Sicherheit der Mauer entscheidend, weil der zulässige Bodendruck in der Regel innerhalb viel engerer Grenzen liegt als die zulässigen Fugenspannungen.

Die Beantwortung der Frage, wie der Stützpunkt in der Sohle liegen muß, hängt wesentlich von der *physikalischen Natur des Bodens* ab. Auch muß dabei berücksichtigt werden, ob die Lage des Stützpunktes etwa *veränderlich* ist. Das wird der Fall sein, wenn des Erdreich veränderliche Lasten zu tragen hat, wenn, wie bei Ufermauern, die Sohle wechselnd starken *Auftrieben* ausgesetzt ist, oder wenn sich in der Hinterfüllung durch den Auftrieb oder aus andern Ursachen Wasser ansammeln kann. Selbst der Witterungswechsel und starke Änderungen in der Wärme der umgebenden Luft machen die Mittelkraftlinie schwanken, dürfen also in besonderen Fällen nicht außer acht gelassen werden.

Steht die Mauersohle auf sog. *gutem Baugrunde*, wie Sand, Kies und trockener Lehm oder Ton, so können obige Lagenänderungen des Stützpunktes keine Bedenken hinsichtlich der Sicherheit der Mauer erregen, wenn dabei die größten überhaupt vorkommenden Bodendrücke nur innerhalb der zulässigen Grenzen bleiben. Auch liegt kein solches Bedenken vor, wenn etwa der Stützpunkt s ein wenig *außerhalb des Kernpunktes* i' fällt (Fig. 231), so daß der Bodendruck auf der Strecke ni der Sohlenfuge verschwindet, falls nur die elastisch allein widerstehende Druckzone (I. § 18) nicht unzulässig beansprucht wird.

In allen derartigen Fällen kann aber sehr wohl eine Gefahr für die Mauer eintreten, wenn der Baugrund *stark zusammenpreßbar* ist, wie feuchter Lehm oder Ton oder dergl., weil ein derartiger Boden unter einer ungleichmäßigen und wechselnden Verteilung des Druckes *nicht*

eben genug bleibt, vielmehr bei jeder Lagenänderung des Stützpunktes nach oben hin eine stärkere Rundung annehmen wird. Dadurch verkleinert sich mehr und mehr die allein widerstehende Druckzone und in entsprechendem Maße wächst dadurch die Gefahr des Kantens der Mauer nach außen. In solchen Fällen muß man den Querschnitt der Mauer so gestalten und die Breite ihrer Sohle so bemessen, *daß das Büschel der verschiedenen, unter den erwähnten Belastungsschwankungen entstehenden Mittelkraftlinien symmetrisch zur Sohle der Mauer zu liegen kommt.* Denn wenn der Stützpunkt um das Mittel der Sohle schwingt, sind einer eintretenden ungleichmäßigen Druckverteilung die engstmöglichen Grenzen gesteckt. Deshalb wird auch der Boden unter der Sohle möglichst *eben* bleiben.

Einzelheiten der Darstellung von Mittelkraftlinien und Berechnungen von Bodendrücken sind in den Zahlenbeispielen (unter **66**) zu vergleichen.

b. Vergleichende Betrachtung verschiedener Mauerquerschnitte. Zwei Querschnitte können verschiedene Gestalten zeigen, obwohl sie unter sonst gleichen Umständen, d. h. für gleiche Belastungsverhältnisse und gleiche Sicherheit, konstruiert worden sind. Wenn beide Querschnitte danach *statisch* auch gleichwertig erscheinen, so kann doch *konstruktiv* der eine vor dem andern gewisse Vorzüge besitzen. Um dies näher darlegen zu können, sind in der Fig. 223 acht der gebräuchlichsten Querschnittsformen von Stützmauern nebeneinander gestellt worden.

Zuerst wird die Frage zu beantworten sein, welche Form unter sonst gleichen Umständen *das kleinste Mauergewicht* erfordert, oder was etwa dasselbe sagt, welche Form die geringsten Herstellungskosten verursacht. Die Antwort würde lauten müssen: »*Diejenige Form, bei welcher für die maßgebende Belastung die Mittelkraftlinie durch die Mitte aller Fugen verläuft.*« Das wäre die unter Nr. 8 gezeichnete Form, deren Wandlinien beide krumm sind, denn deren sämtliche Fugen würden, falls die Wandkrümmungen richtig konstruiert wären, nur durch Achsenkräfte beansprucht. Deshalb müßten alle Fugenbreiten kleiner ausfallen, als bei den übrigen Formen der Fig. 223. Das geringste Mauergewicht würde Nr. 8 also erfordern, wenn auch im allgemeinen nicht die kleinsten Kosten, weil die Herstellung der krummen Wände mehr Arbeitslohn bedingt, als bei geraden oder gebrochenen Wänden. Diese werden jenen sogar meist vorgezogen.

Die Nr. 1 bis 3 zeigen je zwei ebene Wandflächen. Die statisch ungünstigste Form besitzt Nr. 1, weil sie, bei gleichem Flächeninhalte und gleicher mittlerer Stärke bei *a* einen größern Bodendruck verursacht,

als die beiden andern Formen. Dabei erscheint statisch Nr. 3 im allgemeinen günstiger als Nr. 2, worüber die Tabellen 6 und 7 des Anhanges in § 11 zu vergleichen sind[1].

Eine wesentliche Verbesserung erhält die Form Nr. 1, wenn die Sohle bei a, wie Nr. 4 zeigt, durch einen Vorsprung der Vorderwand verbreitert und infolgedessen der Bodendruck in a wesentlich verkleinert wird. Der Vorsprung ist aber in manchen örtlichen Fällen nicht zulässig. Die Formen 5 bis 7 sind Annäherungen an die günstigste Gestalt der Nr. 8. Sehr verbreitet ist ihrer Einfachheit und Zweckmäßigkeit wegen die Form Nr. 5.

c. **Analytische Ausdrücke für die Größe des Erddruckes in einfachen Konstruktionsfällen.** Der einfachste Fall wäre ebene lotrechte Wand und wagerechte gerade Wandlinie (Nr. 1, 3, 4 in Fig. 223). Schon PRONY (1802) hat hierfür bei Annahme eines *wagerechten* Erddruckes

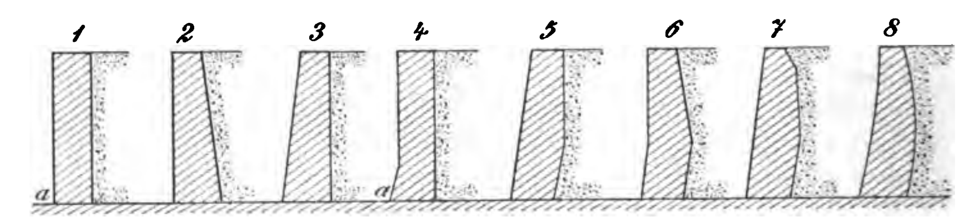


Fig. 223.

$$E = \frac{\gamma_e h^2}{2} \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) \tag{142}$$

nachgewiesen (**53**, a). Die Gleichung folgt ohne Weiteres aus der Größe des Erddruckmaßes cd. Ist E wagerecht, so ist der Winkel β (Fig. 193) gleich Null und

$$E = \gamma_e \cdot \frac{\overline{cd}^2}{2} \,.$$

Weil aber Fl. ibc = Fl. icd sein muß (Gl. 116), so folgt weiter

$$\overline{cd} = \overline{bc}\,,$$

d. h. der Winkel zwischen der natürlichen Böschungslinie ih und Wand bi wird durch die Gleitfläche ic halbiert. Der Winkel beträgt also $\frac{90^0 - \varphi}{2}$ oder, weil $\overline{bc} = h \operatorname{tg}\left(\frac{90^0 - \varphi}{2}\right)$:

---

[1] Die Tabellen sind entnommen aus HÄSELER. Stütz- und Futtermauern. Handbuch d. Ing.-Wissenschaften. II. Band. III. Kap. 3. Aufl.

$$E = \frac{\gamma_e h^2}{2} \cdot \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Nimmt man die Richtung des Erddruckes E um den Winkel φ_1 gegen die Wandsenkrechte, d. h. gegen die Wagerechte, geneigt an, so wird $\beta = \varphi_1$ und (aus dem Druckdreiecke berechnet)

$$E = \frac{\gamma_e \cdot \overline{cd}^2}{2 \cdot \cos\varphi_1}.$$

Unter Benutzung der Gl. (116), sowie auch der Gl. (125) ist es dann leicht, die Größe von E als Funktion der gegebenen Größen: Wandhöhe h, Erdgewicht γ_e, Reibungswinkel φ und φ_1 auszudrücken. Man erhält

$$E = \frac{\gamma_e h^2}{2}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_1} + \sqrt{\sin\varphi \cdot \sin(\varphi + \varphi_1)}}\right)^2. \qquad (143)$$

Dieser Ausdruck ist schon nicht mehr einfach. Noch viel verwickelter wird er aber, wenn man ihn unter Annahme *nicht* lotrechter Wand und *nicht* wagerechter Erdlinie ableiten will. Verfasser verzichtet deshalb auf die Wiedergabe weiterer Ausdrücke, indem er diejenigen Leser, die an Stelle der bequemeren graphischen Behandlung einmal die rechnerische versuchen wollen, auf die im Anhange § 11 (unter **72**) gegebenen Tabellen (nach Häseler) verweist.

66. Zahlenbeispiele.

a. Gebrochene Wand ohne Überlast.

1. *Aufgabe. Für den in der* Fig. 224 *verzeichneten Mauerquerschnitt sollen die Teilerddrücke und deren Mittelkraft E dargestellt werden.*

Die Gleitflächen und Druckdreiecke sind nach dem (unter **63**, b) angegebenen Verfahren ermittelt worden. Zuerst wurden die Gleitfläche i_1c_1 und das zugehörige Druckdreieck für E_1 gezeichnet. Der Inhalt des vom Erdruckmaß und der Parallelen zur zweiten Stellungslinie i_2S_2 begrenzten schraffierten Dreiecks sei f_1 und

$$g_1 = \gamma_e \cdot 1 \cdot f_1.$$

Verwandelt man dann das um g_1 verminderte Gewicht des Prismas $i_2i_1bc_2$ (in bekannter Weise) in ein Prisma $i_2s_2c_2$, so kann s_2 als Ausgangspunkt einer Parallelen zur Stellungslinie i_2S_2 dienen, mit deren Hilfe (nach **59**, a) die Gleitfläche i_2c_2 und das zugehörige Druckdreieck für E_2' gefunden werden kann. Es ist (nach Gl. (138)

$$E_2 = E_2' - E_{1-2},$$

wenn E_{1-2} die in die Richtung von E_2 fallende Seitenkraft von E_1 ist, so daß E_1, E_{1-2} und g_1 (Fig. 225) ein Kraftdreieck bilden.

Im Druckdreieck für E_2' begrenzt eine Parallele zur dritten Stellungslinie $i_3 S_3$ ein schraffiertes Dreieck, dessen Inhalt f_2 sei. Das Gewicht

$$g_2 = \gamma_e \cdot 1 \cdot f_2$$

bildet dann ein Kraftdreieck mit E_2' und der in die Richtung von E_3 fallenden Seitenkraft von E_2'. Ebenso müssen die vier äußern Kräfte:

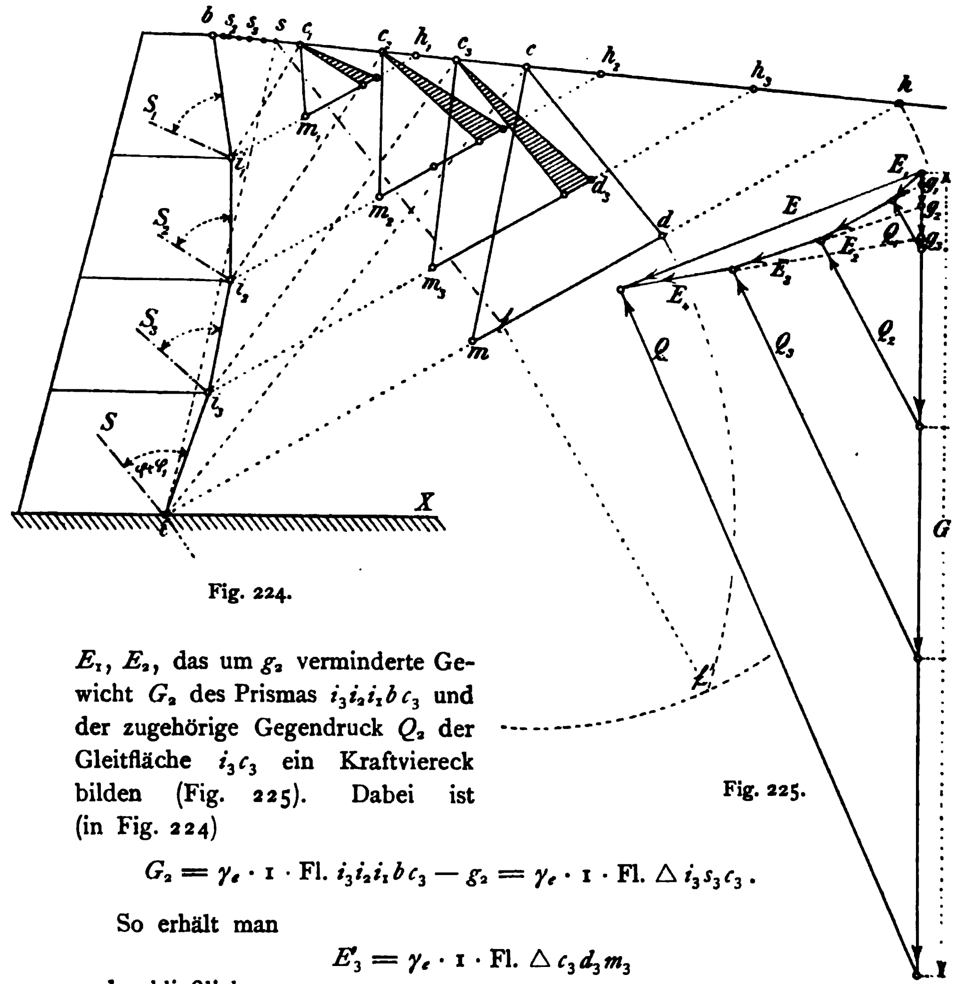


Fig. 224.

Fig. 225.

E_1, E_2, das um g_2 verminderte Gewicht G_2 des Prismas $i_3 i_2 i_1 b c_3$ und der zugehörige Gegendruck Q_2 der Gleitfläche $i_3 c_3$ ein Kraftviereck bilden (Fig. 225). Dabei ist (in Fig. 224)

$$G_2 = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl. } i_3 i_2 i_1 b c_3 - g_2 = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl. } \triangle\, i_3 s_3 c_3 .$$

So erhält man

$$E_3' = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl. } \triangle\, c_3 d_3 m_3$$

und schließlich

$$E_4' = \gamma_e \cdot 1 \text{ Fl. } \triangle\, c d m .$$

Durch Abgreifen in der Fig. 224 sind die Flächeninhalte der vier Druckdreiecke berechnet worden. Das ergab für $\gamma_e = 1{,}6$ t/m³

$$E_1 = 1{,}6 \cdot 0{,}46 = 0{,}74 \text{ t}$$
$$E_2' = 1{,}6 \cdot 1{,}53 = 2{,}44 \text{ t}$$
$$E_3' = 1{,}6 \cdot 2{,}5 \;\; = 4{,}00 \text{ t}$$
$$E_4' = 1{,}6 \cdot 4{,}07 = 6{,}51 \text{ t}.$$

Diese Größen wurden in Fig. 225, zusammen mit den Gewichten g_1, g_2, g_3 aufgetragen und danach konnten die gesuchten Erddrücke abgemessen werden:

$$E_1 = 0{,}74 \text{ t}; \quad E_2 = 1{,}74 \text{ t}$$
$$E_3 = 1{,}98 \text{ t}; \quad E_4 = 2{,}4 \text{ t}.$$

Die Mittelkraft E ergab sich mit 6,88 t.

2. *Aufgabe. Für den in der* Fig. 226 *dargestellten Mauerquerschnitt dessen Hinterwand die gleiche gebrochene Linie zeigt, wie diejenige in* Fig. 224 *der vorigen Aufgabe, soll die Mittelkraftlinie gezeichnet und der größte Bodendruck berechnet werden.*

Die Gewichte der Mauerabschnitte werden für $\gamma_m = 2$ t/m³ berechnet. Man erhält

$$\text{I} = 1{,}15 \;\; \cdot 2 = 3{,}30 \text{ t}$$
$$\text{II} = 2{,}485 \cdot 2 = 4{,}97 \text{ t}$$
$$\text{III} = 2{,}65 \;\; \cdot 2 = 5{,}30 \text{ t}$$
$$\text{IV} = 2{,}85 \;\; \cdot 2 = 5{,}70 \text{ t}.$$

Diese Mauergewichte sind mit den aus der Fig. 225 gewonnenen Erddrücken (in Fig. 228) zusammengesetzt und der Pol O in den Anfang des Kräftezuges I—E_1—II—E_2—III—E_3—IV—E_4 gelegt worden. Sodann werden in der Fig. 226 die Angriffspunkte der Teilerddrücke ermittelt, nach dem (unter **64**, c) gegebenen Verfahren unter Auftragen der Gesamterddrücke. Danach wurde gemacht:

die Strecke $i_1 k_1 = E_1$
- - $i_1 k_1' = E_{1-2}$
- - $i_2 k_2 = E_2'$.

Daraus erhält man:

$$\overline{i_2 k_2} - \overline{i_1 k_1'} = \overline{l_2 k_2} = E_2 .$$

Ferner:

die Strecke $i_2 k_2' = E_{2-3}$
- - $i_3 k_3 = E_3'$

die Strecke $l_3 k_3 = E_3$.

Schließlich:

die Strecke $i_3 k_3' = E_{3-4}$
- - $i k = E_4'$

die Strecke $l k = E_4$.

Jede der schraffierten Flächen wurde in ein Rechteck verwandelt, dessen Höhe den *Angriffspunkt* des zugehörigen Erddruckes festlegte.

Fig. 226.

Fig. 228.

Fig. 227.

So fanden sich die Punkte e_1, e_2, e_3 und e_4, durch welche die Richtung je eines der bereits gefundenen Erddrücke verläuft. Die Mittelkraftlinie

war jetzt gegeben, sie ist mit roter Farbe in Fig. 226 eingezeichnet. Die letzte Seileckseite, die dem Strahle R des Kraftecks der Fig. 228 parallel ist, trifft die Sohle ai im Punkte r, dem *Stützpunkte*. Seine Lage entscheidet die Frage nach der vorhandenen Sicherheit der Mauer.

Die *Verteilung des Bodendruckes* über die Sohlenfuge ai ist in Fig. 227 mit Hilfe der Einflußlinien der Randspannungen (I. **111**) graphisch dargestellt: Der Stützpunkt r liegt innerhalb des Kernes, deshalb sind *beide* Randspannungen, sowohl σ_a als auch σ_i *Drücke*. Der mittlere Druck σ_0 berechnet sich mit

$$\sigma_0 = \frac{V}{F} = \frac{21650}{174 \cdot 100} = 1{,}24 \text{ atm},$$

wenn V die lotrechte Seitenkraft der Mittelkraft R ist. Die wagerechte Seitenkraft H ist mit 6400 kg abzugreifen. Nimmt man die Reibungsziffer zwischen Sohle und Erde mit 0,57 an, was einem Reibungswinkel von 30° entspricht, so ist

$$\frac{0{,}57 \cdot V}{H} = \frac{0{,}57 \cdot 21650}{6400} = 1{,}93$$

d. h. es ist 1,93 fache Sicherheit gegen *Verschieben* der Mauersohle vorhanden.

Die Drücke in den Randpunkten a und i berechnen sich aus

$$\sigma_i = \frac{M_{ka}}{F k_a} = \frac{21650\left(\frac{174}{6} + 4\right)}{174 \cdot 100 \cdot \left(\frac{174}{6}\right)} = 1{,}4 \text{ atm}$$

$$\sigma_a = 2 \cdot \sigma_0 - \sigma_i = 2{,}48 - 1{,}4 = 1{,}08 \text{ atm}.$$

b. Ufermauer mit Überlast von Einzelkräften.

Aufgabe. Eine 10,2 m hohe, in der Krone 2 m und der Sohle 4 m breite Ufermauer besitzt eine wagerechte Hinterfüllung aus feinem Sand oder Kies (Fig. 229), in welcher ein Langschwellengleis liegt, das von schweren Lokomotiven befahren wird, wie sie im Anhange (unter **68**, a) dargestellt sind. Das Hochwasser vor der Mauer steigt bis auf etwa 1 m unter Kronenhöhe, das niedrigste Wasser steht 2 m über der Sohle. Es kommen Fälle vor, wo das Hochwasser plötzlich fällt, so daß die Hinterfüllung bei niedrigstem Wasserstande oft noch stark durchnäßt ist. Unter Berücksichtigung des Wasserdruckes und der Lokomotivlasten ist *die Mittelkraftlinie zu zeichnen und danach der größte Bodendruck zu ermitteln.*

Lösung:

1. *Die Belastungen.* Die Gewichte werden mit

$$\gamma_e = 1{,}6 \text{ t/m}^3$$
$$\gamma_m = 2{,}0 \text{ t/m}^3$$

berechnet. Der Winkel φ der natürlichen Böschung des *durchfeuchteten* Erdreiches und der Reibungswinkel φ_1 sollen gleich angenommen werden,

$$\varphi = \varphi_1 = 25^\circ$$
$$\varphi + \varphi_1 = 50^\circ .$$

Die Mitte des Langschwellengleises liegt $7 + \frac{1,5}{2} = 7,75$ m vom Kronenpunkte b entfernt. Der auf jeden Schienenstrang kommende Raddruck beträgt 8,5 t. Es fragt sich nun, wieviel von den 5 Radlasten von je 8,5 t auf 1 m Tiefe der Hinterfüllung zu rechnen sein wird. Würden die Lasten durch die Langschwellen ganz gleichmäßig auf der Hinterfüllung verteilt werden, so hätte man $P = \frac{8,5}{1,5} = 5,7$ t zu rechnen. Bei schlechter Lage des Gleises, Senkungen und dergl. kann aber die Verteilungsfläche erheblich kleiner werden. Deshalb wird angenommen, *daß die Raddrücke von* 2 · 8,5 t *allein von einer* 1 m *tiefen und* 1,5 m *breiten Fläche aufzunehmen sind.*

Das Hochwasser vor der Mauer gefährdet deren Standfestigkeit nicht, obwohl bei steigendem Wasser der Poreninhalt der Hinterfüllung sich auch mit Wasser füllt (**57**, b und **65**, a). Der gefährlichste Zustand der Mauer tritt bei niedrigstem Wasserstande ein, wenn die Hinterfüllung noch durchfeuchtet ist und dadurch deren Reibungswinkel φ und φ_1 kleiner werden. Es werden also zu berücksichtigen sein

der Wasserdruck $\quad W = \frac{\gamma \cdot 2^2}{2} = 2$ t

der Auftrieb $\quad A = 2 \cdot 4 \cdot \gamma = 8$ t .

2. *Die Gleitflächen und Druckdreiecke* sind der Reihe nach in Fig. 229 dargestellt. Die Gleitfläche $i_1 c_1$ für die obere schräge Wandfläche ist in bekannter Weise (nach **59**) mit Hilfe des Halbkreises über der Böschung $i_1 h_1$ gefunden worden. Die unter 50° gegen die Wandrichtung geneigte Stellungslinie verlief dabei durch b. Das Druckdreieck $c_1 d_1 m_1$ ergab

$$E_1 = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle c_1 d_1 m_1 = 11,15 \text{ t} .$$

Jetzt wurde die Gleitfläche *ohne Überlast* für den Angriffspunkt c_2 der Radlast P gesucht. Wie zu übersehen ist, fällt ihr Fußpunkt i_2 in die *lotrechte* Hinterwand der Mauer. Es muß deshalb das Gewicht g (**63**, b) berechnet werden, das vom Gewicht des Gleitprismas $i_2 i_1 b c_2$ abzuziehen ist. Deshalb wurde im Druckdreieck für E_1 die Parallele $c_1 e$ zur Stellungslinie iS der untern Wand gezogen. Das so erhaltene

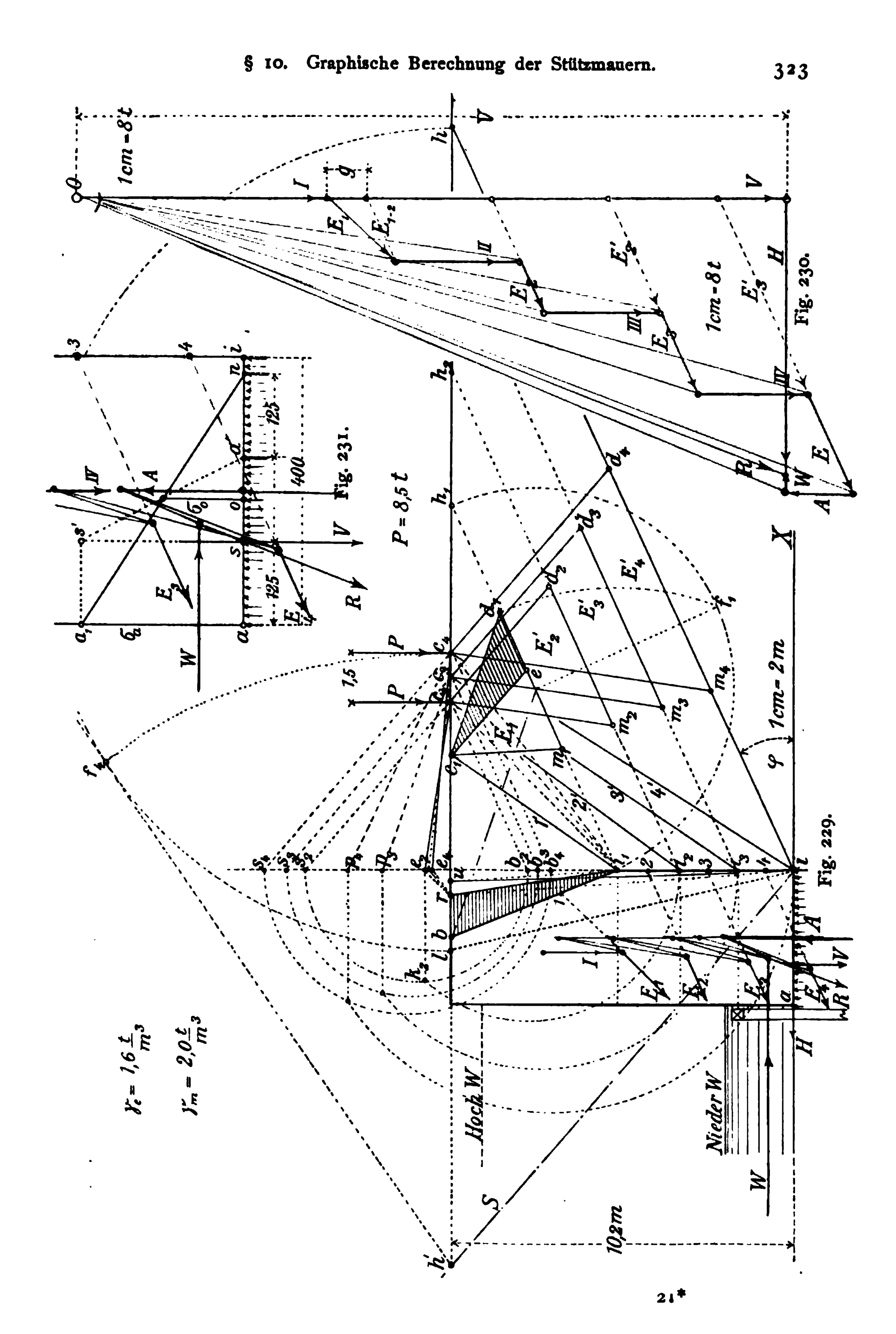


Fig. 229. Fig. 230. Fig. 231.

(schraffierte) Dreieck $c_1 d_1 e$ wurde dann (nach Fig. 217 unter **63**, b) in ein flächengleiches Dreieck $i_1 b r$ verwandelt. Das ergab

$$g = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle i_1 b r = 4{,}8 \text{ t}.$$

Durch Ziehen von

$$\overline{r e_2} \parallel \overline{i_1 c_2}$$

erhielt man den *dreieckigen* Prismaquerschnitt $i_1 e_2 c_2$ dessen Spitze e_2 in der Wandrichtung $i i_1$ liegt und das dem Gleitprisma $i_2 i_1 r c_2$ gleichwertig ist. Die Gleitfläche $i_2 c_2$ konnte jetzt bestimmt werden, nachdem vorerst noch durch c_2 Parallelen zur Böschungslinie und zur Stellungslinie iS gezogen worden waren. Das sind die Parallelen $c_2 b_2$ und $c_2 s_2$: Über der $\overline{b_2 s_2}$ der Halbkreis; durch e_2 Senkrechte zur $i e_2$, die den Kreis in k_2 schneidet. Dann ist (nach **61**, b) die Sehne $b_2 k_2$ gleich der gesuchten Wandstrecke $b_2 i_2$.

Macht man $\overline{c_2 d_2}$ parallel zur Stellungslinie iS und gleich der $d_2 m_2$, so erhält man das Druckdreieck für E_2', d. h. für den *gesamten* Erddruck, der von dem Gleitprisma $i_2 i_1 b c_2$ *in der Richtung des Erddruckes* E_2 auf die Wandstrecke $i_1 i_2$ ausgeübt wird. Es ist also (nach Gl. 138 unter **63**, a)

$$E_2 = E_2' - E_{1-2}.$$

Man vergl. dazu die Fig. 230, worin das Kraftdreieck, gebildet aus E_1, E_{1-2} und g dargestellt ist, um zu erkennen, wie auch E_3 und E_4 durch die Größen E_3' und E_4' ohne weiteres gegeben sind.

Zwischen ihren Angriffspunkten c_2 und c_4 soll sich (nach unserer Annahme) das Gewicht der beiden Radlasten P gleichmäßig verteilen. In c_3 hört also die Wirkung *eines* der Gewichte auf. Für c_3 ist die nächste Gleitfläche gezeichnet. Vorher wurde 1) das Gleitprisma $i_2 i_1 r c_3$ (in bekannter Weise) in ein gleichwertiges Dreieck $i_3 e_3 c_3$ verwandelt (Punkt e_3 liegt zwischen e_2 und e_4) und 2) wurde

$$P = 8{,}5 \text{ t} = \gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle c_3 e_3 p_3 \text{ gemacht:}$$

Halbkreis über der $b_3 s_3$ usw. Damit war auch das Druckdreieck für E_3' gegeben usw.

Endlich wurde die Gleitfläche für den Angriffspunkt c_4 der zweiten Radlast P gezeichnet:

$$\overline{r e_4} \parallel \overline{i_1 c_4}$$

und

$$\gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle c_4 e_4 p_4 = 2P = 17 \text{ t}.$$

Dabei traf *zufällig* der Fußpunkt c_4 fast genau mit dem Punkte i zusammen. Deshalb wurde die Höhe der Mauer auf 10,2 m abgestimmt, so daß jetzt in Wirklichkeit i der Fußpunkt der Gleitfläche für den Angriffspunkt c_4 geworden ist.

Danach verteilt sich die erste Einzellast P über die Wandstrecke $i_2 i_\varepsilon$ und die zweite über die Strecke $i_3 i$.

3. *Eine Nachprüfung der gefundenen Lage der Gleitfläche* ic_4, und dadurch der Erddrücke E_4' und E_4 wurde mit Hilfe *eines über der verlängerten Erdlinie geschlagenen Halbkreises* (**59**, a) ausgeführt. Dabei ist zuerst die Fläche $ii_1 rc_4$ in ein gleichwertiges Dreieck iuc_4 verwandelt und sodann ein Dreieck uli angetragen worden, so daß

$$\gamma_e \cdot 1 \cdot \text{Fl.} \triangle uli = 2P = 17 \text{ t}$$

wurde.

Halbkreis über der $\overline{lh}$; vom Schnittpunkte h' der verlängerten Erdlinie und der Stellunglinie iS eine Tangente daran gelegt, die in f_4 berührt. Dann muß

$$\overline{h'f_4} = \overline{h'c_4}$$

sein, was auch der Fall ist. In ähnlicher Weise können auch noch die gefundenen Lagen der andern Gleitflächen nachgeprüft werden.

4. *Die Mittelkraftlinie.* Es berechneten sich

die Erddrücke	die Mauergewichte
$E_1 = 11{,}15$ t	I $= 30{,}0$ t
$E_2' = 15{,}10$ t	II $= 14{,}8$ t
$E_3' = 25{,}67$ t	III $= 13{,}6$ t
$E_4' = 38{,}54$ t	IV $= 13{,}2$ t
	$71{,}6$ t.

Dazu

$$W = 2 \text{ t und } A = 8 \text{ t}.$$

Diese äußern Kräfte sind in der Fig. 230 zu einem *Krafteck* zusammengesetzt worden.

Die *Angriffspunkte* der Kräfte und ihre Richtungen liegen fest: E_1 greift im obern Punkt des untern Drittels der Wandstrecke bi_1 an; E_2, E_3, E_4 greifen in *der Mitte* der betreffenden Wandstrecken an, wenn man (genau genug) die Linien der Darstellung der Gesamterddrücke (vergl. Fig. 226 des vorigen Beispiels) als *Gerade* ansieht (**64**, a). Wird dann der Pol O (wie in der Fig. 230 geschehen) in die Ecke des Kraftecks gelegt, so läßt sich das *Seileck* der Mittelkraftlinie zwischen den festgelegten Kraftrichtungen zeichnen.

Weil die Mittelkraftlinie in der Nähe der Sohle (wegen des kleinen Maßstabes in Fig. 229) etwas undeutlich ausgefallen ist, so ist sie in

der Fig. 231 nochmals im doppelten Maßstabe der Fig. 229 wiedergegeben worden.

5. *Der Bodendruck.* Die Mittelkraft R fällt ein wenig außerhalb des Kerns, so daß auf der Strecke ni der Sohle die Spannung zu Null wird. Die allein widerstehende Druckzone ist (nach I. **129**) dreimal so breit, als die Strecke as. Der mittlere Bodendruck berechnet sich mit

$$\sigma_0 = \frac{V}{F} = \frac{84800}{3 \cdot 125} = 2{,}26 \text{ atm},$$

σ_a ist doppelt so groß, also

$$\sigma_a = 4{,}52 \text{ atm}.$$

Die wagerechte Seitenkraft von R ist

$$H = 33000 \text{ kg}.$$

Wird der Reibungswinkel zwischen Sohle und dem *nassen* Untergrunde gleich $\varphi = \varphi_1 = 25^\circ$ angesetzt, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi = 0{,}466$$

und

$$\frac{V \operatorname{tg} \varphi}{H} = \frac{84800 \cdot 0{,}466}{33000} = 1{,}2.$$

Das bedeutet nur eine 1,2fache Sicherheit gegen Verschieben der Mauer auf dem Untergrunde.

§ 11. Anhang.

In seinen Vorträgen und Übungen pflegt Verfasser Umdruckhefte zu verteilen, in denen die wichtigsten der Berechnung von Baukonstruktionen als Unterlage dienenden Angaben über *Gewichte*, *Belastungen*, *Grundmaße* u. dergl. mehr enthalten sind. Die nachfolgenden Zusammenstellungen, auf welche an verschiedenen Stellen des vorliegenden Bandes bereits hingewiesen worden ist, entstammen dem neuesten Umdrucke solcher Art. Die darin gegebenen Berechnungsunterlagen beziehen sich hauptsächlich auf *Fachwerke*, *Gewölbe* und *Stützmauern*. Aber auch im III. Bande bei der Behandlung der *statisch unbestimmten* Konstruktionen wird darauf Bezug genommen werden.

67. Eigengewichte einfacher eiserner Balkenträger.

a. Für Eisenbahnbrücken.

Tabelle 1 (nach DIRCKSEN[1]).

Die Angaben gelten für *ein*gleisige, gerade, nicht schiefe und nicht in Krümmungen liegende Brücken. Für ebensolche *zwei*gleisige Brücken sind die angegebenen Zahlenwerte zu *verdoppeln*.

Beschränkte Bauhöhe erhöht das *Fahrbahn*gewicht um höchstens 20%

Schiefe der Brücke - - - - - 15%

Gleiskrümmungen mit Halbm. < 300 m erhöhen das *Gesamt*gewicht - - 12%

Es bezeichnet: l Stützweite, b Hauptträgerabstand in m.

Bauart der Brücke:	Gewicht in kg für 1,0 m der Hauptträger mit Windverband, Lager u. Stützen der Fußwege.	Gewicht in kg für 1,0 m der Fahrbahn bei einer Breite b von:		Gesamtgewicht in kg für 1,0 m
1) *Blechträger*: a) Bahn oben:	—	—	—	$240 + 54\,l$
dgl. bei $l = 20$ bis 40 m b) Bahn mitten oder unten	$270 + 44\,l$	3,0 m 3,3 - 3,7 -	380 430 520	$650 + 44\,l$ $700 + 44\,l$ $790 + 44\,l$
dgl. c) mit durchgehendem Kiesbett (nach nebenstehendem Bilde)	$270 + 49\,l$	3,3 m 3,7 -	670 840.	$940 + 49\,l$ $1110 + 49\,l$
dgl. d) wie vor (nach nebenstehendem Bilde)	$270 + 49\,l$	3,3 m 3,7 -	770 940	$1040 + 49\,l$ $1210 + 49\,l$
2) *Fachwerkträger*: a) Bahn mitten oder unten, wobei $l = 20$ bis 40 m	$540 + 27\,l$	4,8 m 4,9 - 5,0 -	600 625 670	$1140 + 27\,l$ $1165 + 27\,l$ $1210 + 27\,l$
dgl. b) wie vor, jedoch $l = 40$ bis 60 m	$680 + 27\,l$	4,8 m 4,9 - 5,0 -	600 625 670	$1280 + 27\,l$ $1305 + 27\,l$ $1350 + 27\,l$
dgl. c) Bahn oben	$540 + 27\,l$	2,5 m 3,5 -	490 580	$1030 + 27\,l$ $1120 + 27\,l$

[1] Zentralbl. der Bauverw. 1904.

Über die *Verteilung des Gewichtes auf die Knoten des Ober- und Untergurtes* vergl. unter **1**, c.

b. Für Straßenbrücken.

Tabelle 2 (nach ENGESSER[1]).

Benennung der Konstruktionsteile	Gewichte in kg für 1 qm des Fahrbahngrundrisses				
	Für Landstraßen		Für Stadtstraßen		
	mit doppeltem Bohlenbelage	mit Beschotterung	mit doppeltem Bohlenbelage	mit Beschotterung	mit Pflasterung
*Eisen*gewicht der Hauptträger einschließl. Fahrbahn	$105 + 2{,}3\,l + 0{,}02\,l^2$	$125 + 2{,}8\,l + 0{,}025\,l^2$	$155 + 2{,}7\,l + 0{,}021\,l^2$	$170 + 3{,}2\,l + 0{,}028\,l^2$	$180 + 3{,}7\,l + 0{,}029\,l^2$
*Eisen*gewicht der Fußwege (mit Holz bedeckt) einschl. der Verstärkung der Hauptträger ausschließl. Geländer	$60 + 2{,}3\,l$	$60 + 2{,}3\,l$	$80 + 2{,}7\,l$	$80 + 2{,}7\,l$	$80 + 2{,}7\,l$
Bohlenbelag	110	—	140	—	—
Belageisen	—	65	—	80	80
Schotter	—	400	—	480	—
Pflaster	—	—	—	—	700
8 mm starke Buckelplatten	—	—	—	—	65

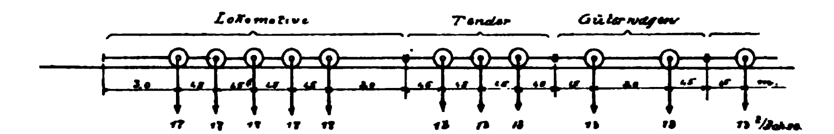
68. Verkehrslasten der Brücken.

a. Züge der Haupt- und Nebeneisenbahnen. Bestimmungen, die für alle deutsche Staaten gemeinsam gelten, gibt es nicht. Jeder Staat hat seine eigenen Vorschriften. Für *Übungen* genügt es, den durch Erlaß des preußischen Ministers der öffentlichen Arbeiten vom 5. April 1901 vorgeschriebenen, nachstehend gezeichneten Lastenzug zu benutzen.

---

[1] Zeitschr. f. Baukunde 1881.

Dabei ist ein Zug mit zwei Lokomotiven in ungünstigster Stellung mit einer unbeschränkten Anzahl von angehängten Güterwagen anzunehmen.



So lange weniger als fünf Lokomotivachsen auf der Brücke rollen, sowie auch für die Berechnung der Quer- und Längsträger (I. **10**) sind — soweit sich dadurch höhere Beanspruchungen ergeben — in Rechnung zu stellen:

18 t für eine Achse bei Belastung mit	4	Achsen von	1,5 m	Radstand
19 t - - - - - -	3	- -	1,5 -	-
20 t - - - - - -	1 oder 2	- -	1,5 -	-

2. *Als Lastenzüge für Nebenbahnen* sind — sofern der Übergang der Fahrzeuge auf die Hauptbahn ausgeschlossen ist — anzunehmen:

Bei Vollspur: Preußische Vorschrift: (2 Tender-Lokomotiven)

Radstand: 2,183—3,0—2,45—2,35—2,10—1,6—2,62 m
Achsdruck: 13,6—12,15—10,0—10,18—12,8—12,8 t.

Wenn notwendig, sind Hauptbahngüterwagen anzuhängen.

Bei Schmalspur: Sächs. Vorschrift: (In gleicher Richtung fahrende Tenderlokomotiven.)

Radstand: 1,85—1,35—2,95—1,35—1,65 m
Achsdruck: 7,25—7,25—7,25—7,25 t.

Eine Einzellast von 10 t darf in keinem Konstruktionsteile höhere, als durch vorstehende Lasten erzeugte Spannungen erzeugen.

3. *Belastungsgleichwerte für Hauptbahnen* (**5**, d). Für überschlägliche und vergleichende Rechnungen können die Zugeinzellasten durch eine gleichmäßig verteilte Last p wie folgt ersetzt werden:

Für die Gurtungen:

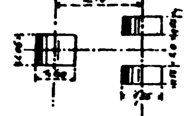
bei $l = 10$ bis $50\,\mathrm{m}: p = 4{,}2 + 23 : l$; bei $l > 50\,\mathrm{m}: p = 3{,}1 + 80 : l$.

Für die Wandstäbe:

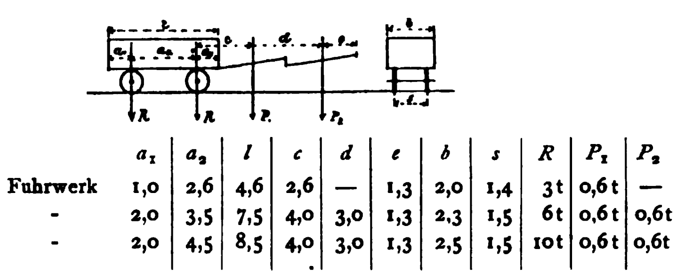
dgl. $p = 4{,}6 + 34 : l$ dgl. $p = 3{,}6 + 82 : l$.

b. Belastungen der Straßenbrücken.

1. *Walzen*: Chaussee-Walze: Gewicht 6,0 t,
Dampfwalze: Vorderwalze 10,0 t,
Hinterwalze $2 \cdot 6,5 = 13,0$ t.



2. *Fuhrwerke*:



		a_1	a_2	l	c	d	e	b	s	R	P_1	P_2
Leichtes	Fuhrwerk	1,0	2,6	4,6	2,6	—	1,3	2,0	1,4	3 t	0,6 t	—
Mittelschweres	-	2,0	3,5	7,5	4,0	3,0	1,3	2,3	1,5	6 t	0,6 t	0,6 t
Schweres	-	2,0	4,5	8,5	4,0	3,0	1,3	2,5	1,5	10 t	0,6 t	0,6 t

3. *Menschengedränge*:

Für Brücken auf dem Lande: 300 kg/qm
- - in Städten: 500 -
Für Berechnungen von Fußwegen: 560 -
} In Mittel: 400 kg/qm.

In neuester Zeit ist in Amerika festgestellt worden (Zentralblatt der Bauverw. 1904), daß die Belastung durch Menschengedränge über 700 kg/qm steigen kann. Es erscheint aber unwirtschaftlich, und aus Sicherheitsgründen auch unnötig, solche außergewöhnlich hohe Belastungen der Berechnung zu Grunde zu legen. Unbedenklich darf man, bei zweckmäßiger Annahme der zulässigen Spannung, die *im regelmäßigen Betriebe* der Brücke wiederkehrenden größten Lasten in die Rechnung einführen. Wenn dann im Laufe der Jahre durch ungewöhnliche Ereignisse einmal höhere als die angenommenen Belastungen eintreten, so wird dadurch allerdings der Sicherheitsgrad der Brücke vorübergehend etwas kleiner. Das ist aber um so weniger von Belang, je größer das Eigengewicht der Brücke im Vergleich zu ihrer Verkehrslast ist (I. **12**).

4. *Belastungen durch Pferde-, Dampf und elektrische Straßenbahnen*:

	Wagengewicht	Dienstgewicht	Radstand
Pferdebahnwagen: Einspänner	1650 kg	3100 kg	1,54 m
Zweispänner mit Decksitzen	2800 -	5600 -	1,83 -
Dampfbahnlokomotive	—	8—22000 kg	1,50—1,80 m
Elektrische Bahnwagen: Motorwagen	6—8000 kg	7500—9500 kg	—
(schwerste Akkumulatorwagen in Dresden	10000 -	12000 kg	1,80 m
Anhänger)	2500—3500 kg	4—5000 kg	—
(schwerste in Dresden)	5000 kg	7000 kg	1,80 -

5. *Belastungsgleichwerte* (5, d). Tabelle 3.

Eiserne Brücken:	Steinerne Brücken:
Nach Winkler:	*Nach Winkler*:
Landstraßenbrücken: für die Gurtungen:	
bei leichtem Fuhrwerk $p = 0{,}85 + 3{,}38 : l$ (t/qm)	bei leichtem Fuhrwerk $p = 0{,}37 + 1{,}7 : l$ (t/qm)
- mittelschwerem - $p = 0{,}96 + 8{,}93 : l$ -	- mittelschwerem - $p = 0{,}34 + 2{,}6 : l$ -
- schwerem - $p = 0{,}94 + 18{,}8 : l$ -	- schwerem - $p = 0{,}28 + 8{,}4 : l$ -
für die Wandstäbe	*Mittelwerte nach Tolkmitt*:
bei leichtem Fuhrwerk $p = 0{,}90 + 3{,}6 : l$ (t/m)	
- mittelschwerem - $p = 1{,}00 + 9{,}5 : l$ -	
- schwerem - $p = 1{,}02 + 20{,}0 : l$ -	

Mittelwerte nach Tolkmitt (Steinerne Brücken):

Spannweite l	Belastungshöhe, wenn $\gamma = 1{,}8$:	$\gamma = 2{,}3$
bei Straßenbrücken		
$l < 10$ m	0,56 m	0,44 m
$l = 10-20$ m	0,44 m	0,34 m
$l > 20$ m	0,32 m	0,24 m
bei Fußwegbrücken		
l beliebig	0,32 m	0,24 m

Tabelle 4. Für *steinerne Eisenbahnbrücken* (nach TOLKMITT).

Verkehrszweck der Brücke	Spannweite l in m	Belastungshöhe bei $\gamma^* = 1{,}8$	$\gamma^* = 2{,}3$
Brücken für Hauptbahnen mit 8,5 t größtem Raddruck	unter 18,0	1,50 m	1,20 m
	18,0 bis 36,0	1,35 -	1,02 -
	über 36,0	1,10 -	0,85 -
wie vor mit 7,0 t größtem Raddruck	unter 12,0	1,40 -	1,10 -
	12,0 bis 24,0	1,20 -	0,94 -
	über 24,0	0,90 -	0,70 -
Brücken für Nebenbahnen	unter 10,0	1,00 -	0,78 -
	10,0 bis 20,0	0,82 -	0,64 -
	über 20,0	0,64 -	0,50 -

* γ bedeutet das zugrunde gelegte Einheitsgewicht des Steines.

69. Grundmaße gewölbter Brücken.

a. Abmessungen und Fugendrücke ausgeführter Bauwerke.

Tabelle 5. *Eisenbahnbrücken.*

Bauwerk:	Baustoff	Spannw. l (m)	Pfeil f (m)	$\frac{f}{l}$	Scheitelstärke d_c	R*)	$\frac{d_c}{l}$	Kämpferstärke	Größter Fugendruck	Bemerkungen
Pruth-Br. bei Jaremcze	Sandstein	65	17,9	1:3,64	2,1	38,45	1:31	3,1	27,5	In 3 Ringen gewölbt.
Gutach-Br.	Bruchstein	64	16,1	1:3,98	2,0	39,851	1:32	2,8	35,19	dgl. (Vogesen-Sandst.)
Hoch-Br. bei Gour-Noir	Granit	62	16,1	1:3,85	1,70	36,0	1:36	4,20	30,4	dgl. (St. roh bearb.)
Lavaur-Br.	Bruchstein	61,5	27,5	1:2,24	1,65	31,2	1:37	2,81	23	dgl.
Mulden-Br. bei Göhren, Sachsen .	Granulit	60	6,75	1:8,89	1,10	—	1:55	1,20	36	3-Gelenkbogen. Bruchst. Größte Wölbstärke 1,50 m
Schwändelholz-Br.	Vogesen-Sdst.	57	14,25	1:4	1,80	35,625	1:32	2,60	34,54	In 3 Ringen gewölbt.
Antoinette-Br..	Bruchstein	50	15,9	1:3,14	1,50	31,0	1:33	2,28	30	dgl.
Tal-Br. von Nogent üb. d. Marne .	dgl.	50	25,0	1:2	1,80	25,0	1:28	4,50	—	—
Pruth-Br. bei Jamna	Sandstein	48	11,4	1:4,21	1,70	—	1:28	2,60	25,1	In Ringen gewölbt.
Br. ü. d. Ariège b. Castelet . . .	Bruchstein	41,2	14,0	1:2,94	1,25	-	1:33	2,25	20	dgl.
I. Pruth-Br. b. Worochta	Sandstein	40	10,0	1:4	1,40	—	1:29	2,20	21,4	dgl.
Tal-Br. von Ville franche	—	39,36	17,0	1:2,32	1,40	—	1:28	2,00	20	—
Main-Br. bei Kitzingen	Bruchstein	36,5	7,3	1:5	1,00	—	1:37	—	25,2	—
II. Pruth-Br. bei Worochta. . . .	dgl.	34,6	17,8	1:1,94	1,30	17,3	1:27	2,10	17,6	In Ringen gewölbt.
Flut-Br. der neuen E.-B.-Br. über d. Elbe in Dresden	Beton	31,0	—	—	1,10	—	1:28	1,30	—	3-Gelenkbogen.
Wertach-Br. b. Nesselwang . . .	Bruchstein	27,5	—	—	0,80	—	1:34	—	18,4	—

*) R Krümmungshalbmesser der Bogenachse im Scheitel.

Tabelle 6. *Straßenbrücken.*

Bauwerk:	Baustoff	Spannw. l (m)	Pfeil f (m)	$\frac{f}{l}$	Scheitelstärke d_c	R	$\frac{d_c}{l}$	Kämpferstärke	Größter Fugendruck	Bemerkungen
Br. ü. d. Syratal b. Plauen i. V. . .	Bruchstein	90,0	18,0	1:5	1,80	66,0	1:50	4,00	49,5	
Br. ü. d. Petrussetal b. Luxemburg	dgl.	72,0	16,20	1:4,44	1,44	55,0	1:50	2,16	—	In 3 Ringen gewölbt.
Prinz-Regenten-Br. i. München . .	Muschelkalk	64,0	6,40	1:10	1,00	—	1:64	1,25	45	Quadergew.-3 Stahlgel.
Grosvenor-Br. (Engl.)	Quader	60,96	12,80	1:4,76	1,22	42,61	1:50	1,83	—	Bruchfuge 1,55 m.
Max-Josef-Br. i. München	Muschelkalk	60,0	6,0	1:10	1,00	—	1:60	1,25	45	Quadergew.-3 Stahlgel.
Hannibal-Br. ü. d. Volturno . . .	Ziegel	55,0	14,02	1:3,92	2,0	57,0	1:28	5,0	—	Korbbogen.
Teufels-Br. b. Barrizzo	dgl.	55,0	13,35	1:4,06	2,0	57,2	1:28	3,5	—	dgl.
Dracbr. b. Claix (Frankr.)	Bruchstein	52,0	8,05	1:6,46	1,50	46,0	1:35	3,10	—	—
Neckarbr. i. Neckarhausen	Beton	50,82	4,62	1:11	0,85	—	1:60	0,90	39,8	3-Gelenkbogen.
Donau-Br. i. Munderkingen . . .	dgl.	50,0	5,0	1:10	1,00	70,0	1:50	1,10	38	dgl.
Nalontal-Br. (Asturien)	dgl.	50,0	4,5	1:11,11	1,10		1:45	1,10	40,53	dgl.
Donau-Br. i. Inzigkofen	dgl.	43,0	4,46	1:9,64	0,70		1:61	0,80	36,5	dgl.
Coulouvrenière-Br. i. Genf. . . .	dgl.	40,0	5,55	1:7,21	1,00		1:40	1,20	20,0	dgl.
Boucicaut-Br. ü. d. Saône	Quader	40,0	5,0	1:8	1,05		1:38	1,24	19,9	—
Br. ü. d. Saône b. Charrey	Bruchstein	30,5	3,75	1:8,13	1,50		1:20	—	12,1	—
Oder-Br. zu Frankfurt	Ziegel	30,0	3,75	1:8	0,80		1:38	1,29	—	—
Enz-Br. bei Höfen	Quader	28,0	2,8	1:10	1,0		1:28	1,50	24,0	3-Gelenkbogen.
Forbach-Br. i. Baiersbronn . . .	dgl.	25,0	3,0	1:8,33	0,60		1:42	0,80	56,4	dgl.
Herkules-Br. i. Berlin	Sandstein	23,36	3,30	1:7,08	0,85		1:27	1,16	40,0	Quadergewölbe.
Kaiser-Wilhelm-Br. i. Berlin . . .	Granit	22,24	4,0	1:5,56	0,80		1:28	1,50	60,0	dgl.
Oberbaum-Br. i. Berlin	Klinker i. Zem.	22,0	3,41	1:6,45	0,77		1:29	1,03	24,0	—
Waisenbr. in Berlin	dgl.	20,0	3,40	1:5,88	0,51		1:39	1,60	24,0	—
Spreebr. in Cöpenick	dgl.	18,0	3,40	1:5,29	0,64		1:28	0,90	11,4	Zement 1 : 3
Lange Br. in Potsdam	dgl.	18,0	4,60	1:3,91	0,64		1:28	1,50	12,7	—
Moltke-Br. in Berlin	dgl.	17,46	3,50	1:5	0,90		1:19	1,30	24,0	- 1 : 3
Friedrich-Br. in Berlin	dgl.	17,0	2,88	1:5,90	0,51		1:33	0,90	24,0	- 1 : 3
Luther-Br. in Berlin	dgl.	17,0	3,43	1:4,96	0,64		1:27	1,03	24,0	- 1 : 3

b. Erfahrungsformeln für die Scheitelstärke der Gewölbe (**45**).

In den Formeln bedeutet R den Krümmungshalbmesser der innern Wölblinie im Scheitel.

1. Nach PERRONET: Für Bögen aus Haustein: $d_c = 0{,}33 + 0{,}035\, l$.
2. Nach RANKINE: - - - - $d_c = 0{,}191 \sqrt{R}$.
3. Nach HEINZERLING: a) Schütthöhen $< 1{,}50$ m.

Bögen aus Haustein: $d_c = 0{,}39 + 0{,}025 \cdot R$
- - Ziegeln: $d_c = 0{,}43 + 0{,}028 \cdot R$
- - Bruchstein: $d_c = 0{,}48 + 0{,}031 \cdot R$.

b) Schütthöhen $> 1{,}50$ m.

Bögen aus Haustein: $d_c = 0{,}45 + 0{,}030 \cdot R$
- - Ziegeln: $d_c = 0{,}51 + 0{,}033 \cdot R$
- - Bruchstein: $d_c = 0{,}55 + 0{,}037 \cdot R$.

4. *Für Betonbögen* nach HOUSSELLE:

$d_c = 0{,}2 + 0{,}025 \cdot R$, wenn Schütthöhe $< 1{,}50$ m
$d_c = 0{,}25 + 0{,}030 \cdot R$, - - $> 1{,}50$ m.

5. Verfassers Formel vergl. unter **45**.

70. Abmessungen von Stützmauern. (Nach HÄSELER[1].)

a. Einfache Stützmauern. Den Angaben liegen folgende Voraussetzungen zugrunde:

1. Der Stützpunkt der wagerechten Sohle liegt im vorderen Kernpunkte.

2. Die Erdlinie ist in Kronenhöhe wagerecht abgeglichen und der Winkel φ der natürlichen Böschung beträgt 33°.

Es bedeuten: F den Mauerquerschnitt, β den Winkel der Mittelkraftlinie mit der Lotrechten im Stützpunkte.
σ den Bodendruck in atm am Rande der Sohle.
γ_e das Gewicht von 1 cbm Erde in kg.
γ_m - - - 1 - Mauerwerk in kg.

[1] Handb. der Ingen.-Wissenschaften. I. Band 2. Abt. III. Auflage.

Tabelle 7. Für $\varphi = 33^\circ$.

No.	Querschnitt	$\gamma_e = \gamma_m$				$\gamma_e = 0{,}8\,\gamma_m$			
		$\frac{b}{h}$	$\frac{F}{h^2}$	β	$\frac{\sigma}{\gamma_m h}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{F}{h^2}$	β	$\frac{\sigma}{\gamma_m h}$
1		0,350	0,350	14° 51′	2,42	0,320	0,320	13° 20′	2,36
2		0,327	0,277	17° 48′	2,14	0,300	0,250	16° 17′	2,05
3		0,340	0,240	19° 45′	1,84	0,310	0,210	16° 39′	1,73
4		0,307	{0,203 {0,222	10° 43′	1,91	0,287	{0,183 {0,198	8° —	1,80
5		0,252	0,202	21° 12′	2,00	0,226	0,176	17° 57′	2,14
6		0,238	{0,188 {0,199	10° 52′	2,12	0,215	{0,165 {0,174	9° 22′	2,02
7		0,472	0,372	15° —	2,10	0,456	0,356	13° 10′	2,01

b. Ufermauern. Der Winkel φ der natürlichen Böschung ist wegen der feuchten Hinterfüllung zu 20° angenommen (vgl. unter **57**, b). Der Wasserdruck an der Vorderseite der Mauer ist vernachlässigt, weil er nur günstig wirkt (**66**, b). E ist die Größe des Erddrucks in kg für 1 m Mauertiefe.

Tabelle 8. Für $\varphi = 20^\circ$.

No.	Querschnitt	γ_w[1] $= \gamma_m$					γ_w[1] $= 0{,}8\,\gamma_m$			
		$\frac{E}{\gamma_w h^2}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{F}{h^2}$	β	$\frac{\sigma}{\gamma_m h}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{F}{h^2}$	β	$\frac{\sigma}{\gamma_m h}$
1		0,214	0,505	0,505	19° 18′	2,29	0,461	0,461	17° 14′	2,25
2		0,214	0,475	0,425	22° —	2,09	0,433	0,383	20° —	2,04
3		0,214	0,463	0,363	24° 45′	1,88	0,422	0,322	22° 56′	1,80
4		0,262	0,614	0,514	19° 16′	2,11	0,590	0,490	16° 55′	2,02

[1] γ_w ist das Gewicht von 1 cbm Wasser in kg.

71. Angaben über Festigkeit und zulässige Spannungen der Baustoffe (vergl. I. § 1).

a. Eisen. in t/cm²

	Schweißeisen	Flußmetall	Stahlguß	Gußeisen
1. *Dehnungszahl* E =	2000	2150 bis 2200	2150	750 bis 1050
2. *Gleitungszahl* G =	770	830 - 850	830	290 - 400

3. *Zulässige Spannungen* (σ) *in Brücken* (I. **7**).

α) *Fachwerkträger* (bei Anwendung von Flußeisen).

Stützweite	$l \geqq$	10	20	40	80	120	150 m
ohne Rücksicht auf Wind	σ =	800	850	900	950	1000	1050 atm
mit - - -	σ =	1000			bis		1300 -

β) *Vollwandige Hauptträger und Fahrbahnträger.*

Hauptträger kleinerer Brücken und Quer- und Längsträger mit durchgehendem Schotterbett. . . . . 800 atm

Quer- und Längsträger bei unmittelbarer Lastübertragung. 700—750 atm

γ) *Nietverbindungen.*

Die zulässige Schubspannung (I. **105**, b) ist gleich den unter α) angegebenen Werten zu wählen.

Der Stauchdruck (I. **105**, b) darf den doppelten Wert hiervon erreichen.

Für die zum Anschluß der Längsträger an die Querträger und der Querträger an die Hauptträger dienenden Niete ist die zulässige Schubspannung gleich den für die betreffende Anordnung zugelassenen Werten, der Stauchdruck gleich dem Doppelten dieser Werte zu wählen.

b. Natürliche und künstliche Steine[1]. Die Dehnungszahl E ist nicht sicher anzugeben.

	Druckfestigkeit (atm)		Druckfestigkeit (atm)
Granit. . . .	800 bis 2000	Grauwacke.	500 bis 1500
Porphyr . . .	1000 - 2600	Kohlensandstein . . .	500 - 1800
Basalt. . . .	1000 - 3200	Keupersandstein . . .	700 - 1800
Trachyt . . .	500 - 1000	Bruch- u. Quadersandst.	300 - 1000
Basaltlava . .	500	Kalkstein	400 - 2000

Die Zugfestigkeit der natürlichen Bausteine kann nach BAUSCHINGER etwa zu $\frac{1}{26}$ ihrer Druckfestigkeit gesetzt werden.

[1] Ausführliche Angaben über die Druckfestigkeit deutscher Bausteine gibt: H. KOCH, die natürlichen Bausteine Deutschlands. Vergl. auch M. FOERSTER, die Baumaterialien. Heft I. II.

	Druckfestigkeit (atm)
Kunstsandstein	450
Hochofenschlacke (getemp.)	1000 bis 2500
Ziegel: Schwachbrand	150 - 200
Mittelbrand	200 - 300
Klinker	300 - 900

72. Elastizität und Festigkeit von Zementmörtel und Beton (vergl. I. § **18**).

a. Dehnungszahlen E von Zementmörteln (nach Mörsch).

Tabelle 9.

Mischung in Raumteilen	Spannung	Wasserzusatz 8% Dehnung	Wasserzusatz 8% E	Wasserzusatz 14% Dehnung	Wasserzusatz 14% E
1:3	Druck 61,3 atm bis 3,0 -	$255 \cdot 10^{-6}$ bis $10 \cdot 10^{-6}$	$24 \cdot 10^4$ bis $30 \cdot 10^4$	$293 \cdot 10^{-6}$ bis $11 \cdot 10^{-6}$	$20{,}9 \cdot 10^4$ bis $27{,}2 \cdot 10^4$
	Zug 1,6 - bis 9,2 -	$6 \cdot 10^{-6}$ bis $47 \cdot 10^{-6}$	$26{,}7 \cdot 10^4$ bis $19{,}6 \cdot 10^4$	$7 \cdot 10^{-6}$ bis $44 \cdot 10^{-6}$	$23 \cdot 10^4$ bis $17{,}5 \cdot 10^4$
1:4	Druck 61,3 atm bis 3,0 -	$290 \cdot 10^{-6}$ bis $11 \cdot 10^{-6}$	$21{,}1 \cdot 10^4$ bis $27{,}3 \cdot 10^4$	$360 \cdot 10^{-6}$ bis $12 \cdot 10^{-6}$	$17 \cdot 10^4$ bis $25 \cdot 10^4$
	Zug 1,6 - bis 7,8 -	$6 \cdot 10^{-6}$ bis $41 \cdot 10^{-6}$	$26{,}6 \cdot 10^4$ bis $19{,}0 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^{-6}$ bis $32 \cdot 10^{-6}$	$25 \cdot 10^4$ bis $19{,}4 \cdot 10^4$
1:7	Druck 61,3 atm bis 3,0 -	$415 \cdot 10^{-6}$ bis $14 \cdot 10^{-6}$	$14{,}8 \cdot 10^4$ bis $21{,}4 \cdot 10^4$	— —	— —
	Zug 1,6 - bis 3,0 -	$8 \cdot 10^{-6}$ bis $28 \cdot 10^{-6}$	$20 \cdot 10^4$ bis $14{,}0 \cdot 10^4$	— —	— —
	Druck 30,6 - bis 3,0 -	— —	— —	$351 \cdot 10^{-6}$ bis $28 \cdot 10^{-6}$	$8{,}7 \cdot 10^4$ bis $10{,}7 \cdot 10^4$
	Zug 1,6 - bis 3,1 -	— —	— —	$13 \cdot 10^{-6}$ bis $31 \cdot 10^{-6}$	$12{,}3 \cdot 10^4$ bis $10 \cdot 10^4$

b. Festigkeit von Zementmörteln (nach Mörsch).

Tabelle 10.

Zement-marke:	Alter (Tage)	Zug 1:3	Zug 1:6	Druck 1:3	Druck 1:6	Verhältnis d. Mischgen. Zug	Verhältnis d. Mischgen. Druck
A	7	20,35	10,73	202,50	84,25	1,88	2,70
	28	27,75	14,33	267,00	100,25	1,94	2,64
	90	32,50	16,50	306,00	115,25	1,97	2,65
B	7	23,38	11,63	205,00	77,25	2,08	2,66
	28	30,08	15,98	289,25	117,75	1,89	2,46
	90	35,03	17,40	325,50	159,75	2,00	2,04
C	7	22,75	11,30	209,75	95,00	2,01	2,20
	28	30,20	16,78	326,50	120,00	1,86	2,70
	90	35,38	18,65	354,00	130,75	1,90	2,61

Die Probekörper waren mit Normalsand hergestellt.

Es ist die mit dem Alter zunehmende Festigkeit zu beachten.

Bei fünffacher Sicherheit würde die zulässige Spannung der Mischungen sein:

Für Zug: max: 7,08—min: 3,3 atm
- Druck: max: 70,08—min: 23,05 atm

und zwar bei einem Alter von 90 Tagen.

c. Zulässige Spannung von Betonmischungen. (Nach Magens.)

Tabelle. 11.

Mischung in Raumteilen	Zulässige Spannung in atm — Druck			reiner Zug			Abscherung		
	nach einer Erhärtungsdauer (Wochen) von:								
	1	4	52	4	13	52	1	4	52
Geringer Beton: *Z* : *FK* : *ZS*									
1 : 7 : 9	—	1	3						
1 : 5 : 7	—	2,5	5						
1 : 3 : 4½	2,5	7	7						
1 : 2½ : 4	3	7	7						
Mittlerer Beton: *Z* : *FK*									
1 : 15	—	2	4						
1 : 10	1	4,5	7						
1 : 8	2,5	7	9						
1 : 7	3	9	12						
1 : 6	4	10	13	—	—	—	—	0,5	2
1 : 5	5	12	15	—	—	—	—	1	4
1 : 4	6	15	20	—	—	—	0,5	2	6
Guter Beton: *Z* : *GK* : *K*									
1 : 7 : 7	5	10	20						
1 : 6 : 6	7	15	23	—	—	1	—	0,5	2
1 : 5 : 5	8	17	25	—	0,5	2	—	1	4,5
1 : 4 : 4	10	20	30	—	1	4	—	1,5	7
1 : 3 : 3	13	25	40	—	1,5	5	0,5	2	9
Bester Beton *Z* : *GK* : *StS*									
1 : 7 : 9	7	14	20	—	1	2	—	0,5	2
1 : 6 : 8	8	18	23	0,5	2	5	—	1	6
1 : 5 : 7	12	20	25	0,7	3	8	—	1,5	10
1 : 4 : 5½	15	25	30	1,0	4	10	0,5	2,5	12
1 : 3 : 4	20	30	40	1,5	5	10	1	3	15

Es bedeutet:

Z — Zement
FS — Flußsand
FK — Flußkies
MS — Muschelkalkschotter
KS — Kiessand
ZS — Ziegelschotter
GK — Grubenkies
K — Kiesel
StS — Steinschlag

d. Festigkeit von reinem Zementmörtel. (Nach Büsing und Schumann[1].)

Tabelle 12.

Erhärtungsdauer	Zug atm.	Druck atm.	Druck / Zug
	10 °/₀ Wasser		
7 Tage	20,0	202,5	10,1
28 -	26,1	285,0	10,9
90 -	28,6	355,0	12,4
180 -	32,1	380,0	11,8
	12 °/₀ Wasser		
7 Tage	13,8	107,5	7,8
28 -	22,9	160,0	7,0
90 -	25,8	207,5	8,0
180 -	26,8	225,0	8,4
	15 °/₀ Wasser		
7 Tage	10,1	55,0	5,4
28 -	18,3	100,0	5,5
90 -	23,0	150,0	6,5
180 -	22,6	170,0	7,5

[1] Der Portlandzement und seine Anwendung im Bauwesen.

